

TSI 2 – Programme de khôlle n° 6

Semaine du 2 novembre 2026 (n° 45)

IV – Déterminants.

Aucune définition formelle du déterminant d'une matrice carrée n'est au programme.

Déterminant d'une matrice carrée : effet des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'un déterminant. $\det(M) = \det(M^\top)$. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda M) = \lambda^n \det(M)$. Si la famille des colonnes (ou des lignes) d'une matrice est liée, son déterminant est nul. Formule du déterminant 2×2 .

Développement par rapport à une ligne ou à une colonne. La formule littérale n'est pas exigible. On insiste sur le fait qu'il est important de « préparer » le déterminant (par opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes) avant d'effectuer un développement, ainsi que sur la présentation (graphique) de ce développement.

Exercice à savoir refaire : soit le déterminant $n \times n$

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Démontrer que pour tout $n \geq 3$: $D_n = D_{n-2}$.

Propriétés du déterminant : $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, caractérisation des matrices inversibles, déterminant de l'inverse d'une matrice inversible, deux matrices semblables ont le même déterminant.

Exercice à savoir refaire : soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Démontrer que $\det(A) \neq 0$ et que $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Exercice à savoir refaire : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Démontrer que $\det(A) = \det(P^{-1}AP)$.

Définition du déterminant d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Formule $\det(f \circ g) = \det(f)\det(g)$. Caractérisation des automorphismes en dimension finie, déterminant de la réciproque d'un automorphisme.

Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base. Caractérisation des bases par le déterminant.

La formule de changement de base pour le déterminant n'est pas au programme.