

TSI 2 – Programme de khôlle n° 5

Semaine du 12 octobre 2026 (n° 42)

III – Variables aléatoires finies.

Pour les questions de cours, reprise des exercices à savoir refaire de la semaine précédente :

- ▷ démonstration de la formule de König-Huygens ;
- ▷ calculer $\mathbf{E}(X)$ lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$;
- ▷ calculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$ lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Définition : indépendance de 2 variables aléatoires, de n variables aléatoires.

Propriétés techniques : si X, Y sont indépendantes, $f(X)$ et $f(Y)$ le sont aussi, les événements $(X \in A)$ et $(X \in B)$ le sont aussi. Généralisation au cas de n variables aléatoires. Lemme des coalitions.

Exercice à savoir refaire : on lance n fois successivement un dé à six faces.

1. Modéliser ceci.
2. Soit $1 \leq k \leq n$. Quelle est la probabilité d'obtenir le premier six au k^{e} lancer ?
3. Quelle est la probabilité de n'obtenir aucun six ?

Théorème : soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi $\mathcal{B}(p)$. Alors $S_n = X_1 + \dots + X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. Interprétation et lien avec le schéma de Bernoulli.

Covariance : définition. Interprétation du signe de la covariance. Propriétés élémentaires ($\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{Cov}(Y, X)$, $\mathbf{Cov}(X, X) = \mathbf{V}(X)$), formule $\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$. Interprétation du signe de la covariance.

Développements de $\mathbf{V}(X + Y)$ et de $(aX + bY)$.

Cas où X et Y sont indépendantes : $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$, $\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$, $\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$. Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, $\mathbf{V}(X_1 + \dots + X_n) = \mathbf{V}(X_1) + \dots + \mathbf{V}(X_n)$.

Exercice à savoir refaire : si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, démontrer que $\mathbf{E}(X) = np$ et $\mathbf{V}(X) = np(1 - p)$.