

TSI 2 – Programme de khôlle n° 3

Semaine du 28 septembre 2026 (n° 40)

II – Compléments d'algèbre linéaire.

Transposée d'une matrice. Linéarité de la transposition, transposée d'un produit. Formule $(A^\top)^\top = A$.

Théorème : si A est inversible, $A^\top$ est inversible et $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.
Démonstration exigible en exercice à savoir refaire.

Matrices symétriques, antisymétriques. $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de dimensions respectives $\frac{n(n+1)}{2}$ et $\frac{n(n-1)}{2}$.

Théorème : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Trace d'une matrice carrée. Linéarité de la trace, trace d'une transposée et trace d'un produit de matrices.

Théorème : si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $\text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(A)$.
Démonstration exigible en exercice à savoir refaire.

Trace d'un endomorphisme.

Polynôme de matrices.

Exercice à savoir refaire : soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P(X) = X^2 - X - 2$.

Calculer $P(A)$, et en déduire que A est inversible. Exprimer A^{-1} , en fonction de A notamment.

Définition : sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme.

Base adaptée à une décomposition en deux sev supplémentaires : si $\mathcal{B}_F$ est une base de F , $\mathcal{B}_G$ est une base de G et si $E = F \oplus G$, alors la concaténation de $\mathcal{B}_F$ et de $\mathcal{B}_G$ est une base de E .

En dimension, caractérisation de la stabilité d'un sev par un endomorphisme par la décomposition par blocs de la matrice de l'endomorphisme dans une base adaptée.

Projecteurs/projections : définition géométrique, propriétés fondamentales ($F = \text{Im}(p) = \text{Ker}(p - \text{Id}_E)$, $G = \text{Ker}(p)$, $p \circ p = p$), éléments caractéristiques et équations associées. Théorème : si $p \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $p \circ p = p$, alors $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$, et p est la projection sur $\text{Im}(p)$ et parallèlement à $\text{Ker}(p)$.

Symétries : définition géométrique, propriétés fondamentales ($F = \text{Ker}(s - \text{Id}_E)$, $G = \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$, $s \circ s = \text{Id}_E$), éléments caractéristiques et équations associées. Théorème : si $s \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $s \circ s = \text{Id}_E$, alors $E = \text{Ker}(s - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$, et s est la symétrie par rapport à $\text{Ker}(s - \text{Id}_E)$ et parallèlement à $\text{Ker}(s + \text{Id}_E)$.