

TSI 2 – Programme de khôlle n° 1

Semaine du 14 septembre 2026 (n° 38)

I – Rappels et compléments d'intégration.

Théorème fondamental du calcul différentiel (point 1 du théorème 1.2.1), savoir déterminer une primitive par un calcul intégral (notation $\int^x f(t) dt$).

Méthodes de calcul : primitivation directe, intégration par parties (énoncé à savoir) et changement de variables (énoncé à savoir).

Exercice à savoir refaire : pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 t^n dt$.

Exercice à savoir refaire : retrouver une primitive de $\ln$ par intégration par parties.

Exercice à savoir refaire : calculer $\int_0^{\pi/2} \sin^2(t) dt$ (méthode au choix de l'étudiant : poser $t = \frac{\pi}{2} - x$ ou linéariser).

Théorèmes de positivité, croissance, inégalité triangulaire. Bien se souvenir de l'hypothèse $a \leq b$. Théorème de nullité d'une fonction positive continue d'intégrale nulle.

Exercice à savoir refaire : Soit $n \geq 1$. Représenter la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $[n, n+1]$. En proposant un encadrement judicieux, montrer que $\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{n}$. Simplifier ensuite le terme du milieu.

Exercice à savoir refaire : si P est un polynôme vérifiant $\int_0^1 P^2(t) dt$,

alors $P = 0$ (ne pas oublier l'argument d'infinité des racines).

Sommes de Riemann : énoncé du théorème. Savoir faire apparaître une somme de Riemann.

Intégrale d'une fonction à valeurs complexes : aucun théorème exigible, on effectuera les calculs directement, au besoin.

Intégrale généralisée en $+\infty$ (de la forme $\int_a^{+\infty} f(t) dt$, où $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{K}$ est continue). Définition de la nature de l'intégrale, et de la valeur dans le cas de convergence. Si $c \geq a$, $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ et $\int_c^{+\infty} f(t) dt$ ont la même nature.

Nature de l'exemple de Riemann. Démonstration exigible (en exercice à savoir refaire).

Nature et valeur en cas de convergence l'exemple $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$. Démonstration exigible (en exercice à savoir refaire).

Propriété de linéarité de l'intégrale convergente.

Exercice à savoir refaire (règle CV+DIV=DIV) : Soit $f, g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continues, telles que

▷ $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge ;

▷ $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ diverge.

Montrer que $\int_a^{+\infty} (f(t) + g(t)) dt$ diverge.

Propriétés de positivité et de croissance de l'intégrale convergente.

Lemme : si f est positive et continue, alors $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est croissante.

Propriété : cas des fonctions positives, continues et d'intégrale nulle.

Théorèmes de comparaison : version $\leq$, $\sim$ et o (le O est au programme, mais est moins utilisé).

Exercice à savoir refaire (astuce du $\times t^2$) : Quelle est la limite en $+\infty$ de $t^3 e^{-t}$? En déduire que $\int_0^{+\infty} t e^{-t} dt$ converge.

La fin du chapitre sera au programme de la semaine suivante.