

# TSI2 – Liste des exercices à savoir refaire

21 septembre 2026

## 1 Rappels et compléments d'intégration

- ▷ Soit  $n \in \mathbb{N}$ , calculer  $\int_0^1 t^n dt$ .
- ▷ Déterminer une primitive de la fonction  $\ln$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- ▷ Calculer  $\int_0^{\pi/2} \sin^2(u) du$  (en posant  $u = \frac{\pi}{2} - t$ , ou par linéarisation).
- ▷ Soit  $n \geq 1$ . Représenter la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t}$  sur  $[n, n+1]$ . En proposant un encadrement judicieux, montrer que

$$\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{n}.$$

Simplifier ensuite le terme du milieu.

- ▷ Soit  $P$  un polynôme réel. On suppose que  $\int_0^1 P^2(t) dt = 0$ . Montrer que  $P$  est le polynôme nul.
- ▷ Démontrer que  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$ .
- ▷ Démontrer que  $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$  converge si et seulement si  $\alpha > 0$ , et vaut  $\frac{1}{\alpha}$  lorsque  $\alpha > 0$ .
- ▷ Soit  $f, g : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  continues, telles que
  - $\int_a^{+\infty} f(t) dt$  converge ;
  - $\int_a^{+\infty} g(t) dt$  diverge.

Montrer que  $\int_a^{+\infty} (f(t) + g(t)) dt$  diverge.

- ▷ En utilisant « l'astuce du  $\times t^2$  », montrer que  $\int_0^{+\infty} te^{-t} dt$  converge.

## 2 Compléments d'algèbre linéaire

- ▷ Soit  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ . Démontrer que  $A^\top$  est inversible, et que  $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$ .
- ▷ Soit  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Démontrer que  $\text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(A)$ .
- ▷ Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $P(X) = X^2 - X - 2$ .

Calculer  $P(A)$ , et en déduire que  $A$  est inversible.

### 3 Variables aléatoires finies

- ▷ Démonstration de la formule de Kœnig-Huygens.
- ▷ Démonstration de la formule de l'espérance de la loi  $\mathcal{U}([1, n])$ , de l'espérance et de la variance d'une loi de Bernoulli.
- ▷ On lance  $n$  fois successivement un dé à six faces.
  1. Modéliser ceci.
  2. Soit  $1 \leq k \leq n$ . Quelle est la probabilité d'obtenir le premier six au  $k^{\text{e}}$  lancer ?
  3. Quelle est la probabilité de n'obtenir aucun six ?
- ▷ Démonstration de la formule de l'espérance et de la variance de la loi  $\mathcal{B}(n, p)$ , en utilisant  $X_1 + \dots + X_n$  où  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes et suivent la loi  $\mathcal{B}(p)$ .

### 4 Déterminants

- ▷ Soit le déterminant  $n \times n$  :  $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ . Démontrer que pour tout  $n \geq 3$  :  $D_n = D_{n-2}$ .
- ▷ Soit  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ . Démontrer que  $\det(A) \neq 0$  et que  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ .
- ▷ Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ . Démontrer que  $\det(A) = \det(P^{-1}AP)$ .

### 5 Séries numériques

- ▷ Déterminer en fonction de  $q \in \mathbb{C}$  la nature de la série géométrique  $\sum q^n$ , et établir que  $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ , en cas de convergence.
- ▷ Soit  $q \in \mathbb{C}$  tel que  $|q| < 1$ , soit  $p \in \mathbb{N}$ . À partir de la formule donnant  $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ , obtenir celle de  $\sum_{n=p}^{+\infty} q^n$  par décalage d'indices.
- ▷ Règle CV+DIV=DIV : soit  $\sum u_n$  une série convergente et  $\sum v_n$  une série divergente. Montrer que la série  $\sum (u_n + v_n)$  est divergente.
- ▷ Simplifier l'expression de  $\ln(n+1) - \ln(n)$ . En déduire la nature de  $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ .
- ▷ Montrer que, pour tout  $x > -1$ ,  $\ln(1+x) \leq x$ . On pourra bien entendu ensuite demander une application (simple) à l'étude de la nature d'une série.
- ▷ Montrer que, pour tout  $x \geq 0$ ,  $\sin(x) \leq x$ . On pourra bien entendu ensuite demander une application (simple) à l'étude de la nature d'une série.
- ▷ Montrer que, pour tout  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ . On pourra bien entendu ensuite demander une application (simple) à l'étude de la nature d'une série.
- ▷ En utilisant une comparaison série-intégrale, retrouver la nature de  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  dans le cas  $\alpha \geq 0$ .  
Que peut-on dire de simple dans le cas  $\alpha < 0$  ?
- ▷ Soit  $n, N, M$  des entiers vérifiant  $1 \leq N < n \leq M$ .

1. En utilisant une comparaison série-intégrale, proposer un encadrement de  $\frac{1}{n^2}$  par deux intégrales de la forme  $\int_{\dots}^{\dots} \frac{dt}{t^2}$ .
  2. En déduire un encadrement de  $\sum_{n=N+1}^M \frac{1}{n^2}$ .
  3. En déduire un encadrement de  $\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ .
- ▷ 1. Montrer que la série  $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$  converge.
2. Donner un encadrement de  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ . Quel est son signe ?

## 6 Éléments propres

- ▷ Démontrer que, pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\{X \in \mathbb{K}^n \mid AX = \lambda X\} = \text{Ker}(\lambda I_n - A)$ .
- ▷ Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $\lambda$  une valeur propre de  $A$  et  $X$  un vecteur propre associé. Démontrer que  $P(A)X = P(\lambda)X$ .
- On pourra admettre le lemme :  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $A^k X = \lambda^k X$  (sa démonstration peut aussi être demandée).

## 7 Intégrales généralisées

- ▷ Démontrer que  $\int_0^1 \ln(t) dt$  converge et que  $\int_0^1 \ln(t) dt = -1$ .
- ▷ Déterminer en fonction de  $\alpha \in \mathbb{R}$  la nature de l'exemple de Riemann  $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ , par primitivation. On demandera de traiter un des trois cas :  $\alpha > 1$ ,  $\alpha = 1$  ou  $\alpha < 1$ .
- ▷ En posant  $t = \frac{1}{u}$  (ou  $u = \frac{1}{t}$ , au choix), retrouver la nature de  $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ . On suppose connue la nature de l'exemple de Riemann en  $+\infty$ .

## 8 Séries entières

- ▷ Montrer que, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , la série  $\sum \frac{z^n}{n!}$  converge absolument. En déduire le rayon de convergence de la série entière  $\sum \frac{z^n}{n!}$ .
- ▷ On admet que la série entière  $\sum \frac{z^n}{n!}$  a un rayon de convergence infini. On pose, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ . Calculer  $y'(x)$  et  $y(0)$ . En déduire une expression de  $y(x)$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
- ▷ En utilisant un développement en série entière de  $\text{Arctan}'(t)$ , déterminer un développement en série entière de  $\text{Arctan}(x)$ , pour tout  $x \in ]-1, 1[$ .

## 9 Diagonalisation, trigonalisation

- ▷ Montrer que si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est diagonalisable et a une seule valeur propre  $\lambda \in \mathbb{K}$ , alors  $A = \lambda I_n$ .
- ▷ Soit  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  telles que  $A = PBP^{-1}$ , alors pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $A^p = PB^pP^{-1}$ .
- ▷ Soit  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Calculer  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$ .

## 10 Fonctions vectorielles, courbes paramétrées

- ▷ Soit  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  dérivables. Démontrer la formule de dérivation donnant  $\frac{d}{dt}(\langle f(t), g(t) \rangle)$ .
- ▷ Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  dérivable. Démontrer la formule de dérivation donnant  $\frac{d}{dt}(\|f(t)\|^2)$ .
- ▷ Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  dérivable. Démontrer la formule de dérivation donnant  $\frac{d}{dt}(\|f(t)\|)$ .

## 11 Espaces euclidiens et préhilbertiens

- ▷ Soit  $\varphi : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une forme bilinéaire, soit  $x_1, x_2, y_1, y_2 \in E$  et  $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ . Développer par bilinéarité  $\varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2)$ .
- ▷ Montrer que si  $a, b \in \mathbb{R}$  vérifient  $a < b$ , alors on définit sur  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  un produit scalaire par  $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt$ .
- ▷ Montrer que pour  $a < b$  deux réels,  $\langle P, Q \rangle = \int_a^b P(t)Q(t) dt$  définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$ .
- ▷ Démontrer que  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$  et que  $\|x\|^2 - \|y\|^2 = \langle x + y, x - y \rangle$ .
- ▷ Soit  $x \in E$ ,  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$ , si l'on écrit  $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ , montrer que  $\lambda_1 = \langle x, e_1 \rangle$ .

## 12 Probabilités sur un univers dénombrable.

- ▷ On réalise une succession de lancers d'un dé à six faces. Pour tout  $n \geq 1$ , on note  $S_n$  l'événement « le  $n$ -ième lancer donne un six »,  $P_n$  l'événement « on obtient le premier six au  $n$ -ième lancer » et  $P_0$  l'événement « on n'obtient aucun six ». On admet que  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est un système complet d'événements. Calculer  $P(P_n)$  pour tout  $n \geq 1$ , puis  $P(P_0)$ .
- ▷ On réalise une succession de lancers d'un dé à six faces. Pour tout  $n \geq 1$ , on note  $S_n$  l'événement « le  $n$ -ième lancer donne un six »,  $P_n$  l'événement « on obtient le premier six au  $n$ -ième lancer » et  $P_0$  l'événement « on n'obtient aucun six ». On admet que  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est un système complet d'événements. Si  $P_n$  est réalisé, on lance un dé à  $n$  faces, et l'on note  $Y$  le résultat de ce lancer de dé. Pour  $n \geq 1$ , donner  $P_{P_n}(Y = 1)$ . Écrire  $P(Y = 1)$  sous la forme d'une somme de série.
- ▷ On réalise une succession de lancers d'un dé à six faces. Pour tout  $n \geq 1$ , on note  $D_n$  la variable aléatoire donnant le résultat du  $n^e$  lancer, et  $X$  le rang d'obtention du premier six. On admet que  $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ . Déterminer la loi de  $X$ .
- ▷ On considère  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  dont la loi est définie par : pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $P(X = n) = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$ . Si  $X = n$ , on effectue un pile ou face donnant pile avec probabilité  $\frac{1}{5^{n-1}}$ . On note  $Y = 1$  si l'on a obtenu pile, et 0 sinon. Déterminer la loi de  $Y$ .
- ▷ Calcul de  $P(X > a)$  lorsque  $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$  et  $a \in \mathbb{N}$ , où  $p \in ]0, 1]$  (on notera  $q = 1 - p$ ).

## 13 Équations différentielles

- ▷ Soit  $A = PDP^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , où  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  et  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Soit  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  dérivable, soit  $Y = P^{-1}X$ . Montrer que  $X' = AX$  si et seulement si  $Y' = DY$ .

## 14 Isométries vectorielles

- ▷ Soit  $E$  un espace euclidien, soit  $f \in \mathcal{O}(E)$ . Montrer que  $f \in \text{GL}(E)$ .

- ▷ Soit  $E$  un espace euclidien, soit  $f \in \mathcal{O}(E)$ . Montrer que  $\text{Sp}(f) \subset \{-1, 1\}$ .
- ▷ Soit  $E$  un espace euclidien, soit  $f \in \mathcal{O}(E)$ . Montrer que  $\text{Ker}(f - \text{Id}_E) \perp \text{Ker}(f + \text{Id}_E)$ .
- ▷ Soit  $A, B \in O_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $AB \in O_n(\mathbb{R})$ .
- ▷ Soit  $M \in O_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $\det(M) \in \{-1, 1\}$ .