

# III Variables aléatoires finies

Dans tout le chapitre,  $(\Omega, \mathbf{P})$  est un espace probabilisé fini, et  $n$  est un entier naturel non nul. Sauf mention du contraire, toutes les variables aléatoires considérées sont réelles.

## 1. Rappels

On trouvera dans la table 1 (en fin de chapitre) une correspondance entre les deux vocabulaires utilisés : le vocabulaire ensembliste et le vocabulaire probabiliste.

### 1.1. Généralités

#### Définition 1.1.1 (formelle).

Étant donné un univers  $\Omega$ , on appelle *variable aléatoire* (réelle) sur  $\Omega$  toute fonction  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

#### Remarque 1.1.2.

Une variable aléatoire est l'objet qui décrit le résultat d'une expérience aléatoire. Par exemple, lorsque l'on lance un dé, on peut considérer la variable aléatoire qui vaut le nombre tiré. Lorsque l'on lance  $n$  dés, on peut aussi considérer  $n$  variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$ , où  $X_i$  vaut le nombre obtenu lorsque l'on a lancé le dé  $n^o i$ .

#### Remarque 1.1.3.

Cette année, vous ne manipulerez que des variables aléatoires à valeurs réelles.

#### Définition 1.1.4 (image d'une variable aléatoire).

Soit  $X$  une variable aléatoire sur un univers  $\Omega$ . L'*image*, ou le *support*, de  $X$  est l'ensemble des valeurs prises par  $X$ . Formellement, c'est  $X(\Omega)$ .

#### Exemple 1.1.5.

Lorsque l'on lance un dé à  $n$  faces et que l'on considère la variable aléatoire correspondant au nombre tiré, l'image de cette variable aléatoire vaut  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

#### Définition 1.1.6 (événements contruits sur une variable aléatoire).

Soit  $X$  une variable aléatoire sur un univers  $\Omega$ . Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $A \subset \mathbb{R}$ . On peut alors considérer les événements suivants.

1.  $[X = x]$  est l'événement « la réalisation de  $X$  vaut  $x$  », ou encore «  $X$  prend la valeur  $x$  ». Formellement, c'est  $X^{-1}(\{x\})$ . Sa probabilité se note  $\mathbf{P}(X = x)$ .
2.  $[X \in A]$  est l'événement « la réalisation de  $X$  appartient à l'ensemble  $A$  », ou encore «  $X$  appartient à  $A$  ». Formellement, c'est  $X^{-1}(A)$ . Sa probabilité se note  $\mathbf{P}(X \in A)$ .

#### Remarque 1.1.7.

On se permettra aussi d'écrire les événements  $[X \leq x]$ ,  $[a \leq X \leq b]$ , etc.

#### Définition 1.1.8.

Soit  $X$  une variable aléatoire sur un univers  $\Omega$ . On appelle *loi de probabilité* de  $X$  la donnée, pour tout  $x \in X(\Omega)$ , du nombre  $\mathbf{P}(X = x)$ .

#### Remarque 1.1.9 (Méthodologie, important).

Pour déterminer la loi d'une variable aléatoire  $X$ , on procédera systématiquement aux étapes suivantes.

1. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par  $X$ , noté  $X(\Omega)$ .
2. Déterminer pour chaque valeur  $x$  prise par  $X$  la probabilité  $\mathbf{P}(X = x)$ .

Quand on reconnaît une loi usuelle (cf. *infra*), on peut remplacer ces deux étapes par le nommage de la loi (et de ses paramètres).

#### Remarque 1.1.10.

La loi d'une variable aléatoire peut se résumer par un tableau de nombres, aux conditions suivantes : tous ces nombres sont positifs, et leur somme vaut 1.

#### Exemple 1.1.11.

Le tableau suivant permet de définir la loi d'une variable aléatoire  $X$  sur  $\{-1, 0, 1, 2\}$ .

|                     |               |               |   |               |
|---------------------|---------------|---------------|---|---------------|
| $k$                 | -1            | 0             | 1 | 2             |
| $\mathbf{P}(X = k)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ |

#### Exercice 1.1.12.

On lance un dé à six faces, dont trois faces portent le numéro 1, deux le numéro 2 et une le numéro 3. On note  $X$  le résultat obtenu lors de ce lancer.

Déterminer la loi de  $X$ .

**Propriété 1.1.13.**

Soit  $X$  une variable aléatoire sur un univers  $\Omega$ . Si  $A$  et  $B$  sont deux parties disjointes de l'image de  $X$  (i.e.  $A \cap B = \emptyset$ ), alors

$$\mathbf{P}(X \in A \cup B) = \mathbf{P}(X \in A) + \mathbf{P}(X \in B).$$

Notamment, si  $a_1, \dots, a_n$ , sont des réels distincts deux à deux alors

$$\mathbf{P}(X \in \{a_1, \dots, a_n\}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(X = a_i).$$

**Exercice 1.1.14.**

On reprend l'exercice 1.1.12.

Calculer  $\mathbf{P}(X \leq 2)$ , de deux manières différentes.

**1.2. Espérance et variance**

Dans toute la suite, on se place dans le cas d'un univers  $\Omega$  fini, et l'on considère une variable aléatoire  $X$  réelle définie sur  $\Omega$ .

**Définition 1.2.1.**

On appelle *espérance* de  $X$  le nombre

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbf{P}(X = x).$$

Si  $\mathbf{E}(X) = 0$ , on dit que  $X$  est *centrée*.

**Remarque 1.2.2.**

L'espérance de  $X$  est ainsi la moyenne des valeurs prises par  $X$ , pondérées par la probabilité que chacune de ces valeurs soit prise par  $X$ .

**Exercice 1.2.3.**

On reprend l'exercice 1.1.12. Calculer  $\mathbf{E}(X)$ .

**Proposition 1.2.4** (positivité de l'espérance).

Soit  $X$  une variable aléatoire positive. Alors,  $\mathbf{E}(X) \geq 0$ .

**Démonstration.**

Dans la définition de l'espérance, tous les termes sommés sont positifs.  $\square$

**Proposition 1.2.5** (Linéarité de l'espérance).

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires sur  $\Omega$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Alors,

$$\mathbf{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbf{E}(X) + \mu \mathbf{E}(Y).$$

**Remarque 1.2.6.**

Lorsque  $Y$  est constante, cela donne la formule

$$\mathbf{E}(aX + b) = a\mathbf{E}(X) + b.$$

**Exercice 1.2.7.**

Calculer l'espérance de la somme des résultats obtenus lors de deux lancers successifs du dé de l'exercice 1.1.12.

Faire de même lorsque l'on somme  $n$  tels dés.

**Proposition 1.2.8** (Formule de transfert).

Soit  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Alors

$$\mathbf{E}[\varphi(X)] = \sum_{x \in X(\Omega)} \varphi(x) \mathbf{P}(X = x).$$

**Exercice 1.2.9.**

On lance le dé de l'exercice 1.1.12, on note  $X$  le nombre tiré. Calculer  $\mathbf{E}(X^2)$ .

**Définition 1.2.10.**

On appelle *variance* de  $X$  le nombre

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}(X))^2]$$

On appelle *écart-type* de  $X$  le nombre

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$$

Si  $\mathbf{V}(X) = 1$ , on dit que  $X$  est *réduite*.

**Remarque 1.2.11.**

On a donc  $\mathbf{V}(X) = \sigma^2(X)$ . On retrouve souvent cette notation pour la variance d'une variable aléatoire.

**Lemme 1.2.12** (HP, mais intéressant).

Si  $X$  est positive (i.e.  $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \geq 0$ ), et si  $\mathbf{E}(X) = 0$ , alors  $\mathbf{P}(X = 0) = 1$ .

**Démonstration.**

Supposons qu'il existe  $x > 0$  tel que  $\mathbf{P}(X = x) > 0$ . On a alors

$$\mathbf{E}(X) \geq x \mathbf{P}(X = x) > 0.$$

Le seul nombre  $x$  pour lequel on peut avoir  $\mathbf{P}(X = x) > 0$  est donc  $x = 0$ . On a immédiatement  $\mathbf{P}(X = 0) = 1$ .  $\square$

**Proposition 1.2.13** (HP, mais intéressant).

$\mathbf{V}(X) = 0$  si et seulement si  $X$  suit une loi constante (elle est alors égale à son espérance).

**Proposition 1.2.14.**

Soit  $a, b \in \mathbb{R}$ . Alors  $\mathbf{V}(aX + b) = a^2\mathbf{V}(X)$ .

**Démonstration.**

Écrire la définition de  $\mathbf{V}(aX + b)$  et utiliser la linéarité de l'espérance.  $\square$

**Proposition 1.2.15** (Formule de König-Huygens).

Soit  $X$  une variable aléatoire sur  $\Omega$ . Alors

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2.$$

**Démonstration.**

En notant  $m = \mathbf{E}(X)$ , qui est une constante

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(X) &= \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}(X))^2] \\ &= \mathbf{E}[X^2 - 2X\mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(X)^2] \\ &= \mathbf{E}[X^2 - 2mX + m^2] \\ &= \mathbf{E}(X^2) - 2m\mathbf{E}(X) + m^2 \\ &= \mathbf{E}(X^2) - 2\mathbf{E}(X)^2 + \mathbf{E}(X)^2 \\ &= \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2. \end{aligned}$$

 $\square$ **Remarque 1.2.16.**

C'est cette dernière formule qui est l'écriture utile de la variance. On l'utilisera systématiquement pour calculer une variance.

On peut se rappeler que « la variance est la moyenne des carrés moins le carré de la moyenne ».

**Exercice 1.2.17.**

On reprend l'exercice 1.1.12. Calculer  $\mathbf{V}(X)$  et  $\sigma(X)$ .

**Proposition 1.2.18** (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev).

Soit  $X$  une variable aléatoire, et  $a > 0$ . Alors

$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\mathbf{V}(X)}{a^2}.$$

**Démonstration.**

Considérer la variable aléatoire  $Y$  valant 1 quand  $|X - \mathbf{E}(X)| \geq a$ , et 0 sinon. Voir que  $aY \leq X$  ce qui donne, par croissance et linéarité de l'espérance, que

$$a\mathbf{E}(Y) \leq \mathbf{E}(X).$$

On voit que  $Y$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geq a)$ , donc

$$\mathbf{E}(Y) = \mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geq a).$$

 $\square$ **Remarque 1.2.19.**

C'est une inégalité importante. Elle explique notamment que la variance est un indicateur de dispersion (voir figure 1).

**Exercice 1.2.20.**

Soit  $Y$  une variable aléatoire vérifiant  $\mathbf{E}(Y) = \frac{5}{3}$  et  $\mathbf{V}(Y) = \frac{5}{9}$ .

Déterminer un intervalle  $I$  vérifiant  $\mathbf{P}(Y \in I) \geq \frac{3}{4}$ .

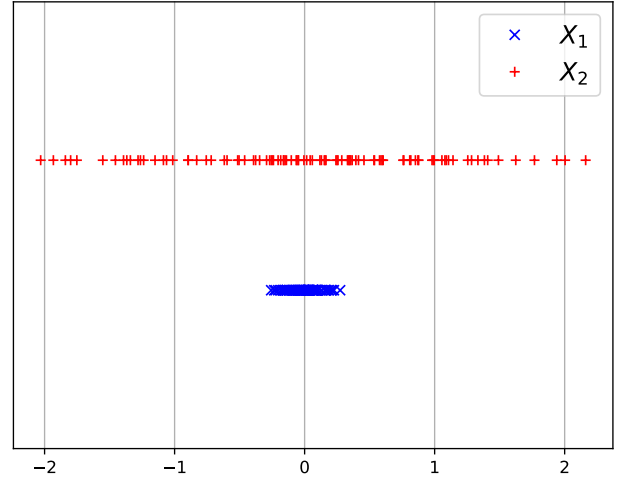


FIGURE 1 – Influence de la variance : 100 réalisations de  $X_1, X_2$ ,  $\mathbf{E}[X_1] = \mathbf{E}[X_2] = 0$ ,  $\mathbf{V}(X_1) = \frac{1}{9}$ ,  $\mathbf{V}(X_2) = 1$ .

**1.3. Lois de probabilités usuelles**

Il convient de connaître les définitions de chacune de ces lois (images comprises), de connaître les situations qu'elles modélisent ainsi que de savoir leurs espérances et leurs variances.

À chaque fois,  $X$  désigne une variable aléatoire réelle, définie sur un univers  $\Omega$ .

**a. Loi certaine (ou constante)**

C'est la loi la plus simple, mais aussi celle que l'on utilise le plus !

**Définition 1.3.1.**

On dit que  $X$  suit une *loi certaine* s'il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $\mathbf{P}(X = a) = 1$ .

**Remarque 1.3.2.**

Avec un léger abus, on pourra noter  $X = a$ .

**Remarque 1.3.3** (modélisation associée).

Les lois certaines/constantes modélisent les résultats d'expériences déterministes.

**Proposition 1.3.4.**

Si  $X$  suit une loi certaine et si  $X = a$ , alors  $\mathbf{E}(X) = a$  et  $\mathbf{V}(X) = 0$ .

**b. Loi uniforme****Définition 1.3.5.**

Soit  $A$  un ensemble fini possédant  $n$  éléments  $a_1, \dots, a_n$  deux à deux distincts :  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ .

On dit que  $X$  suit la *loi uniforme sur  $A$*  si  $X$  est à valeurs dans  $A$  et si

$$\mathbf{P}(X = a_1) = \dots = \mathbf{P}(X = a_n) = \frac{1}{n}.$$

On note ceci :  $X \hookrightarrow \mathcal{U}(A)$ .

**Remarque 1.3.6** (modélisation).

On utilise une loi uniforme pour modéliser un tirage équiprobable. C'est le « au hasard » du langage de tous les jours.

Par exemple, si l'on lance un dé cubiques et que l'on note  $X$  le numéro tiré, alors on modélise cela en disant que  $X$  suit la loi uniforme sur  $\llbracket 1, 6 \rrbracket$ .

Si l'on place  $n$  jetons numérotés de 1 à  $n$  dans une urne, et que l'on en tire 1 puis que l'on note  $X$  le numéro tiré, alors on modélise cela en disant que  $X$  suit la loi uniforme sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

**Remarque 1.3.7.**

Une variable aléatoire suit une loi uniforme si les probabilités apparaissant dans le tableau qui définit sa loi sont toutes égales.

**Exercice 1.3.8.**

On définit la loi de  $X$  par le tableau suivant. Est-ce que  $X$  suit une loi uniforme ?

| $k$                 | 0   | 1 | 2   | 3   | 4   | 5 |
|---------------------|-----|---|-----|-----|-----|---|
| $\mathbf{P}(X = k)$ | 1/4 | 0 | 1/4 | 1/4 | 1/4 | 0 |

**Proposition 1.3.9.**

Si une variable aléatoire  $X$  suit la loi uniforme sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$  ( $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ ), alors

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X) &= \frac{n+1}{2}, \\ \mathbf{V}(X) &= \frac{n^2-1}{12}.\end{aligned}$$

**Démonstration.**

Pour l'espérance :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X) &= \sum_{k=1}^n k \mathbf{P}(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n+1}{2}.\end{aligned}$$

On calcule  $\mathbf{E}(X^2)$  en utilisant la formule de transfert et en justifiant la formule sommatoire par récurrence :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X^2) &= \sum_{k=1}^n k^2 \mathbf{P}(X = k) \\ &= \frac{1}{n} \times \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.\end{aligned}$$

On conclut en utilisant la formule de König-Huygens.  $\square$

**c. Loi de Bernoulli****Définition 1.3.10.**

Soit  $p \in [0, 1]$ . On dit que  $X$  suit la *loi de Bernoulli de paramètre  $p$*  si  $X$  est à valeurs dans  $\{0, 1\}$  et si  $\mathbf{P}(X = 1) = p$ .

On le note  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ .

**Remarque 1.3.11.**

On a alors  $\mathbf{P}(X = 0) = 1 - p$ . On notera souvent  $q = 1 - p$ , et l'on a  $q \in [0, 1]$ .

**Remarque 1.3.12** (modélisation).

On utilise une loi de Bernoulli pour modéliser l'issue d'une expérience binaire. Souvent, on affecte la valeur 1 au succès de l'expérience, et 0 à son échec.

Ainsi, si l'on lance une pièce équilibrée, que l'on considère  $X$  valant 1 si l'on a tiré « pile » et 0 si l'on a tiré « face », alors  $X$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{2}$ .

**Exercice 1.3.13.**

On lance un dé cubique équilibré. On considère  $X$  valant 1 si l'on a obtenu 6 au dé, et 0 sinon. Quelle est la loi de  $X$  ?

**Remarque 1.3.14.**

Toute variable aléatoire à valeurs dans  $\{0, 1\}$  suit une loi de Bernoulli. De quel paramètre ?

**Remarque 1.3.15.**

Une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{2}$  suit aussi la loi uniforme sur  $\{0, 1\}$ .

Une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre 0 ou 1 suit aussi une loi certaine : c'est une constante !

**Proposition 1.3.16.**

Soit  $p \in [0, 1]$ , si  $X$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $p$  ( $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ ), alors

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X) &= p, \\ \mathbf{V}(X) &= p(1 - p).\end{aligned}$$

**Démonstration.**

On a

$$\mathbf{E}(X) = 0P(X = 0) + 1P(X = 1) = p.$$

Comme  $X^2 = X$ ,  $\mathbf{E}(X^2) = p$ , donc  $\mathbf{V}(X) = p - p^2$ .  $\square$

**d. Loi binomiale**

**Définition 1.3.17.**

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $p \in [0, 1]$ . On dit que  $X$  suit la *loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$*  si  $X$  est à valeurs dans  $\llbracket 0, n \rrbracket$  et si

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

On note ceci  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ .

**Définition 1.3.18** (schéma de Bernoulli).

Un schéma de Bernoulli consiste en la répétition de  $n$  expériences indépendantes, ayant chacune une probabilité de succès égale à  $p$ .

**Théorème 1.3.19** (modélisation, version élémentaire).

Si l'on note  $X$  le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli de paramètres  $n$  et  $p$ , alors  $X$  suit la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ .

Un des objectifs de ce chapitre est de donner une interprétation plus efficace de cette modélisation.

**Exemple 1.3.20.**

Le nombre de « pile » obtenus lors de  $n$  lancers successifs d'une pièce équilibrée suit la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $\frac{1}{2}$ .

**Exercice 1.3.21.**

Une classe de TSI2 contient une année trente-quatre 3/2. Chacun de ces étudiants a neuf chances sur dix

d'intégrer une école à la fin de l'année, indépendamment les uns des autres.

Quelle est la probabilité qu'il y ait trois 5/2 l'année suivante ?

**Proposition 1.3.22.**

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $p \in [0, 1]$ . Si  $X$  suit la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ , alors

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X) &= np, \\ \mathbf{V}(X) &= np(1 - p).\end{aligned}$$

**Démonstration.**

Nous allons bientôt en donner une démonstration plus efficace que celle vue en première année.  $\square$

**Exercice 1.3.23.**

On reprend l'exercice 1.3.21. Quel est le nombre moyen de 5/2 l'année suivante ?

## 2. Couples de variables aléatoires réelles (finies)

Dans toute cette partie, on considère deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  définies sur un même espace probabilisé fini  $(\Omega, P)$ .

L'outil principal que l'on utilisera est la *formule des probabilités totales*.

**Rappel 2.0.1** (système complet d'événements).

Un système complet d'événements est une famille  $(A_1, \dots, A_n)$  d'événements deux à deux incompatibles (si  $i \neq j$ , alors  $A_i \cap A_j = \emptyset$ ) et qui recouvrent tout  $\Omega$  ( $\Omega = A_1 \cup \dots \cup A_n$ ).

Un système complet d'événements décrit la plupart du temps toutes les issues possibles d'une expérience aléatoire. Notamment, si  $X$  est une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble  $\{x_1, \dots, x_n\}$ , alors  $([X = x_1], \dots, [X = x_n])$  est un système complet d'événements.

**Exemple 2.0.2.**

Si  $X$  est le résultat d'un lancer de dé à 4 faces, alors on peut considérer le système complet d'événements  $([X = 1], [X = 2], [X = 3], [X = 4])$ . Ce système décrit les quatre issues possibles de cette expérience aléatoire.

**Rappel 2.0.3** (formule des probabilités totales).

Si  $(A_1, \dots, A_n)$  est un système complet d'événements, et si  $B$  est un événement, alors

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i) \mathbf{P}_{A_i}(B).$$

**Remarque 2.0.4** (interprétation).

La formule des probabilités totales est une des formules les plus importantes du programme. Vous devez la connaître sur le bout des doigts. La deuxième formule signifie que  $\mathbf{P}(B)$  est la moyenne des  $\mathbf{P}_{A_n}(B)$ , pondérée par les  $\mathbf{P}(A_n)$ . La figure 2 donne une interprétation de la première formule.

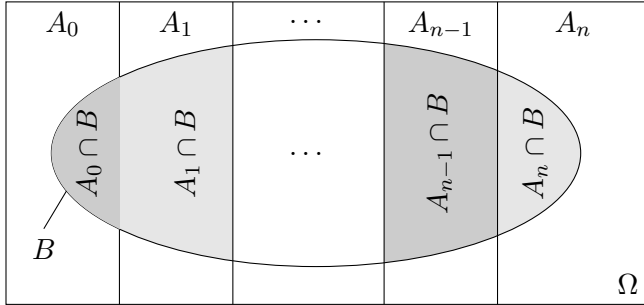


FIGURE 2 – Illustration de la formule des probabilités totales

**Exercice 2.0.5.**

Le bulletin météo annonce trois types de journées : les belles journées (30% des jours), les journées d'averses (50% des jours) et les journées de pluie (20% des jours).

Dans une belle journée, il y a 10% de chances qu'il pleuve. Dans une journée d'averses, il y a 50% de chances qu'il pleuve. Dans une journée annoncée « de pluie », il y a 90% de chances qu'il pleuve.

1. Traduire l'énoncé avec des événements et des données de probabilités ainsi que des probabilités conditionnelles.
2. Un jour étant pris au hasard, quelle est la probabilité qu'il pleuve ce jour-là ?

**2.1. Loi jointe**

Nous allons étudier le couple  $(X, Y)$ .

**Remarque 2.1.1** (formelle).

Si  $X$  est à valeurs dans un ensemble  $E$  et si  $Y$  est à valeurs dans un ensemble  $F$ , alors on peut considérer que le couple  $(X, Y)$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $E \times F$ .

Si  $x \in E$  et si  $y \in F$ , l'événement  $[(X, Y) = (x, y)]$  peut se noter, abusivement,  $[(X = x, Y = y)]$ . On remarque que

$$[(X = x, Y = y)] = [X = x] \cap [Y = y].$$

Ainsi, on peut écrire

$$\mathbf{P}(X = x, Y = y) = \mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y]).$$

**Définition 2.1.2.**

La *loi conjointe* de  $X$  et de  $Y$  est la loi du couple  $(X, Y)$ . C'est donc la donnée des valeurs  $\mathbf{P}(X = x, Y = y)$  pour chaque valeur  $x$  prise par  $X$  et chaque valeur  $y$  prise par  $Y$ .

La loi de  $X$  est appelée *première loi marginale* du couple  $(X, Y)$ , celle de  $Y$  est sa *deuxième loi marginale*.

**Remarque 2.1.3.**

Une loi conjointe peut donc être définie par un tableau de probabilités à double entrée.

**Exemple 2.1.4.**

On peut par exemple définir la loi conjointe de  $X$  et de  $Y$  comme ceci.

|   |   | Y   |     |      |
|---|---|-----|-----|------|
|   |   | 1   | 2   | 3    |
| X | 0 | 1/6 | 1/4 | 0    |
|   | 1 | 1/3 | 1/6 | 1/12 |

On voit ici que  $X$  est à valeurs dans  $\{0, 1\}$ , que  $Y$  est à valeurs dans  $\{1, 2, 3\}$ , que  $\mathbf{P}(X = 0, Y = 1) = \frac{1}{6}$ , que  $\mathbf{P}(X = 0, Y = 3) = 0$ .

**Proposition 2.1.5.**

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles sur  $\Omega$ . Alors la loi conjointe du couple  $(X, Y)$  détermine ses lois marginales.

Plus précisément, pour tout  $x \in X(\Omega)$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X = x) &= \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbf{P}((X = x) \cap (Y = y)) \\ &= \sum_{y \in Y(\omega)} \mathbf{P}(X = x, Y = y). \end{aligned}$$

De même, pour tout  $y \in Y(\Omega)$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y = y) &= \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}((X = x) \cap (Y = y)) \\ &= \sum_{x \in X(\omega)} \mathbf{P}(X = x, Y = y). \end{aligned}$$

**Démonstration.**

Les événements  $(Y = y)$  pour tout  $y \in Y(\Omega)$  constituent un système complet d'événements. Ainsi, pour tout  $x \in X(\Omega)$ , par la formule des probabilités totales

$$\mathbf{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbf{P}((X = x) \cap (Y = y)),$$

ce qui est exactement le résultat cherché.  $\square$

**Exemple 2.1.6.**

En reprenant l'exemple 2.1.4, on détermine la loi de  $X$  en sommant ce tableau ligne par ligne, et l'on détermine la loi de  $Y$  en sommant ce tableau colonne par colonne.

Ainsi,  $\mathbf{P}(X = 0) = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$  et  $\mathbf{P}(X = 1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$ . On obtient donc que  $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{7}{12}\right)$ .

**Remarque 2.1.7.**

La réciproque n'est pas vraie : il ne suffit pas de connaître les lois marginales de  $(X, Y)$  pour en déduire la loi conjointe du couple. Il manque en effet dans l'information contenant les liens qui existent entre  $X$  et  $Y$ .

**Exemple 2.1.8.**

On lance deux pièces équilibrées, et l'on note :

- ▷  $X = 1$  si la première tombe sur face,  $X = 0$  sinon ;
- ▷  $Y = 1$  si la deuxième tombe sur face,  $Y = 0$  sinon.

Les couples  $(X, X)$  et  $(X, Y)$  ont même loi marginale, vu que  $X$  et  $Y$  suivent la loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{2}$ .

Pourtant,  $\mathbf{P}(X = 0, X = 1) = 0 \neq \mathbf{P}(X = 0, Y = 1)$ . Ainsi, les lois jointes de  $(X, X)$  et de  $(X, Y)$  sont différentes. "

**Remarque 2.1.9.**

Ce que l'on vient de faire pour deux variables aléatoires se généralise pour un  $n$ -uplet de variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$ . On peut donc parler de loi conjointe d'un  $n$ -uplet  $(X_1, \dots, X_n)$ .

**2.2. Loi conditionnelle****Définition 2.2.1.**

Soit  $x \in \mathbb{R}$  vérifiant  $\mathbf{P}(X = x) \neq 0$ . On définit la loi conditionnelle de  $Y$  sachant l'événement  $[X = x]$  comme la loi de  $Y$  lorsque l'on sait que l'événement  $[X = x]$  est réalisé, donc lorsque l'on munit l'espace  $\Omega$  de la loi de probabilité  $\mathbf{P}_{[X=x]}$ . C'est donc la donnée des valeurs  $\mathbf{P}_{[X=x]}(Y = y)$ , pour chaque  $y$  dans l'image de  $Y$ .

**Remarque 2.2.2.**

Les lois conditionnelles sont beaucoup utilisées lorsque l'on a un phénomène à deux étapes : on mène une première expérience aléatoire, puis une deuxième qui dépend du résultat de la première. Il est important de reconnaître ces situations, et de savoir les modéliser.

**Proposition 2.2.3.**

On a pour tout  $y \in Y(\Omega)$  :

$$\mathbf{P}(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}(X = x) \mathbf{P}_{[X=x]}(Y = y).$$

**Démonstration.**

C'est une application directe de la formule des probabilités totales.  $\square$

**Remarque 2.2.4.**

Si  $\mathbf{P}(X = x) = 0$ , on convient que  $\mathbf{P}(X = x) \mathbf{P}_{[X=x]}(Y = y)$ , quand bien même  $\mathbf{P}_{[X=x]}(Y = y)$  n'a pas de sens.

En effet, on a  $\mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y]) = 0$ .

**Exercice 2.2.5.**

On lance une pièce équilibrée. On note  $F = 1$  si cette pièce donne face,  $F = 0$  sinon.

Si la pièce a donné face, on lance un dé à six faces dont la moitié des faces valent 1, et l'autre 2. Sinon, on lance un dé à six faces régulier. On note  $D$  le résultat de ce lancer de dé.

1. Quelle est la loi de  $F$  ?
2. Déterminer pour chaque valeur  $k$  prise par  $D$  les valeurs de  $\mathbf{P}_{[F=1]}(D = k)$  et  $\mathbf{P}_{[F=0]}(D = k)$ . Résumer cela avec un vocabulaire de lois conditionnelles.
3. Déterminer la loi de  $D$ .

**Exercice 2.2.6.**

On dispose de  $n$  urnes, numérotées de 1 à  $n$ . La première urne contient un seul jeton, portant le numéro 1. La seconde contient deux jetons, portant les numéros 1 et 2. Ainsi de suite, jusqu'à la dernière urne, qui contient  $n$  jetons, numérotés de 1 à  $n$ .

On tire un jeton dans la dernière urne et on le remet immédiatement. On appelle  $X$  le numéro tiré. On tire ensuite un jeton dans l'urne  $n^\circ X$ , et on note  $Y$  ce numéro du second jeton tiré.

1. Quelle est la loi de  $X$  ?
2. Modéliser l'énoncé en utilisant des lois conditionnelles.
3. Déterminer la loi de  $Y$  en utilisant la formule des probabilités totales sur un système complet d'événements judicieusement choisi.
4. *Question facultative* : déterminer l'espérance de  $Y$ .

### 3. Variables aléatoires réelles (finies) indépendantes

#### 3.1. Couples de variables aléatoires indépendantes.

Dans toute cette partie,  $X$  et  $Y$  désignent deux variables aléatoires réelles, définies sur un même espace probabilisé fini  $(\Omega, \mathbf{P})$ .

##### Définition 3.1.1.

On dit que les variables  $X$  et  $Y$  sont *indépendantes* si, pour tout  $x \in X(\Omega)$  et  $y \in Y(\Omega)$ ,

$$\mathbf{P}(X = x, Y = y) = \mathbf{P}(X = x) \times \mathbf{P}(Y = y).$$

##### Remarque 3.1.2.

L'indépendance de deux variables aléatoires est le plus souvent une donnée de l'énoncé, ou bien tirée de l'énoncé par une étape de modélisation.

On peut en effet modéliser comme étant indépendantes les variables aléatoires découlant « d'expériences indépendantes ». Par exemple, si l'on lance deux dés, et que l'on note  $X$  le premier numéro tiré et  $Y$  le second numéro tiré, on peut modéliser  $X$  et  $Y$  comme étant indépendantes (même si le dé est pipé !).

##### Proposition 3.1.3.

Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, et si l'on a  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , alors  $f(X)$  et  $g(Y)$  sont indépendantes.

##### Démonstration.

Admis

□

##### Proposition 3.1.4.

Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, et si l'on a  $A \subset X(\Omega)$  et  $B \subset Y(\Omega)$ , alors les événements  $[X \in A]$  et  $[Y \in B]$  sont indépendants, ce qui signifie que

$$\mathbf{P}([X \in A] \cap [Y \in B]) = \mathbf{P}(X \in A)\mathbf{P}(Y \in B).$$

##### Démonstration.

Admis

□

##### Remarque 3.1.5.

Les deux résultats précédents signifient que, si  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires indépendantes, tous les objets que l'on peut construire à partir de  $X$  sont indépendants de tous les objets que l'on peut construire à partir de  $Y$ .

##### Exercice 3.1.6.

On lance deux dés à six faces. Modéliser ceci. Quelle est la probabilité de ne pas obtenir de résultat supérieur ou égal à 4 ? Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un six ?

##### Exercice 3.1.7.

On dispose d'une urne contenant  $n$  jetons, numérotés de 1 à  $n$ . On réalise deux tirages *sans remise*, et l'on note  $X$  et  $Y$  les deux numéros tirés, respectivement.

1. Modéliser ceci. Notamment, quelle est la loi de  $X$  ?
2. Déterminer la loi de  $Y$ .
3. Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?

#### 3.2. $n$ -uplets de variables aléatoires indépendantes.

On généralise les notions de la partie précédente à un  $n$ -uplet  $X_1, \dots, X_n$  de variables aléatoires réelles, toutes définies sur un même espace probabilisé fini  $(\Omega, P)$ .

##### Définition 3.2.1.

On dit que  $X_1, \dots, X_n$  sont *indépendantes* si, pour tout  $x_1 \in X_1(\Omega), \dots, x_n \in X_n(\Omega)$ , on a :

$$\mathbf{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \prod_{k=1}^n \mathbf{P}(X_k = x_k).$$

##### Proposition 3.2.2.

Soit  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires indépendantes, soit  $A_1 \subset X_1(\Omega), \dots, A_n \subset X_n(\Omega)$ . Alors, les événements  $[X_1 \in A_1], \dots, [X_n \in A_n]$  sont indépendants, et notamment

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^n [X_k \in A_k]\right) = \prod_{k=1}^n \mathbf{P}(X_k \in A_k).$$

##### Démonstration.

Admis

□

##### Exercice 3.2.3.

On lance  $n$  fois successivement un dé à six faces.

1. Modéliser ceci.
2. Soit  $1 \leq k \leq n$ . Quelle est la probabilité d'obtenir le premier six au  $k^{\text{e}}$  lancer ?
3. Quelle est la probabilité de n'obtenir aucun six ?

**Proposition 3.2.4** (lemme des coalitions).

Supposons que les variables  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes, soit  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R}^{n-p} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Alors, les variables aléatoires  $f(X_1, \dots, X_p)$  et  $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$  sont indépendantes.

**Démonstration.**

Admis

□

**Remarque 3.2.5.**

C'est un résultat d'indépendance par paquets. Cela signifie que le paquet  $(X_1, \dots, X_p)$  est indépendant du paquet  $(X_{p+1}, \dots, X_n)$ , et donc que tout ce que l'on peut construire sur le premier paquet est indépendant de tout ce que l'on peut construire sur le second.

**Théorème 3.2.6.**

Soit  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires indépendantes suivant chacune la même loi de Bernoulli de paramètre  $p \in [0, 1]$ .

Alors,

$$S_n = X_1 + \dots + X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p).$$

**Démonstration.**On le montre par récurrence sur  $n$ .Comme  $S_1 = X_1$ , alors naturellement  $S_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p)$ .

Soit  $n \geq 2$ . Supposons que  $S_{n-1} \hookrightarrow \mathcal{B}(n-1, p)$ . Alors, par le lemme des coalitions, comme  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes,  $X_n$  est indépendante de  $X_1 + \dots + X_{n-1} = S_{n-1}$ .

Comme  $X_n$  est à valeurs dans  $\{0, 1\}$  comme  $S_{n-1}$  est à valeurs dans  $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , alors  $S_n$  est à valeurs dans  $\llbracket 0, n \rrbracket$ . Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , calculons  $P(S_n = k)$ .

- ▷ Si  $k = 0$ ,  $P(S_n = 0) = P([X_n = 0] \cap [S_{n-1} = 0])$  et donc par indépendance de  $X_n$  et de  $S_{n-1}$ ,  $P(S_n = 0) = P(X_n = 0)P(S_{n-1} = 0) = (1-p) \cdot (1-p)^{n-1} = (1-p)^n$ .
- ▷ De même, si  $k = n$ ,  $P(S_n = n) = P([X_n = 1] \cap [S_{n-1} = n-1])$  et donc  $P(S_n = n) = P(X_n = 1)P(S_{n-1} = n-1) = p \cdot p^{n-1} = p^n$ .
- ▷ Si  $0 < k < n$ , alors  $([X_n = 0], [X_n = 1])$  est un système complet d'événements, donc par la formule des probabi-

lités totales

$$\begin{aligned} P(S_n = k) &= P([S_n = k] \cap [X_n = 0]) \\ &\quad + P([S_n = k-1] \cap [X_n = 1]) \\ &= P([S_{n-1} = k] \cap [X_n = 0]) \\ &\quad + P([S_{n-1} = k-1] \cap [X_n = 1]) \\ &= \underset{\text{ind.}}{P(S_{n-1} = k)P(X_n = 0)} \\ &\quad + P(S_{n-1} = k-1)P(X_n = 1) \\ &= \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} \cdot (1-p) \\ &\quad + \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-1-(k-1)} \cdot p \\ &= p^k (1-p)^{n-k} \left[ \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right] \\ &= p^k (1-p)^{n-k} \binom{n}{k} \end{aligned}$$

par la formule du triangle de Pascal, ce qui permet de conclure.

Dans le dernier calcul, on pouvait aussi écrire

$$\begin{aligned} P(S_n = k) &= P_{[X=0]}(S_n = k)P(X = 0) \\ &\quad + P_{[X=1]}(S_n = k)P(X = 1) \\ &= P_{[X=0]}(S_{n-1} = k)P(X = 0) \\ &\quad + P_{[X=1]}(S_{n-1} = k-1)P(X = 1) \end{aligned}$$

puis de voir, par indépendance de  $X$  et de  $S_{n-1}$ , que  $P_{[X=0]}(S_{n-1} = k) = P(S_{n-1} = k)$  ainsi que  $P_{[X=1]}(S_{n-1} = k-1) = P(S_{n-1} = k-1)$ . □

**Remarque 3.2.7.**

Si  $X_1, \dots, X_n$  ne prennent que 0 et 1 comme valeurs, alors  $X_1 + \dots + X_n$  compte le nombre de  $X_i$  valant 1.

Ce résultat est donc la justification de la modélisation proposée l'année dernière pour la loi binomiale. Si l'on a un schéma de Bernoulli, et si  $X_i$  vaut 1 lorsqu'il y a un succès à la  $i^{\text{e}}$  expérience (et 0 sinon), alors les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes, suivent chacune la loi de Bernoulli de paramètre  $p$ , et leur somme  $S_n$  compte le nombre de succès dans ce schéma.

**Corollaire 3.2.8.**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p \in [0, 1]$ , et  $X$  une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ .

Alors,  $E(X) = np$ .**Démonstration.**

L'espérance ne dépendant de la loi d'une variable aléatoire, il suffit de considérer des variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  indépendantes et suivant la loi de Bernoulli de paramètre  $p$ . Ainsi,  $X_1 + \dots + X_n$  suit la même loi que  $X$ , et donc par linéarité de l'espérance

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = np.$$

□

## 4. Covariance

Dans tout ce paragraphe,  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires réelles sur un même espace probabilisé fini  $(\Omega, P)$ .

### Définition 4.0.1.

On appelle *covariance* de  $X$  et  $Y$  le réel

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}(X))(Y - \mathbf{E}(Y))].$$

### Remarque 4.0.2 (HP).

Si  $\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$ , on dit que  $X$  et  $Y$  sont décorrélées (voir figure 3).

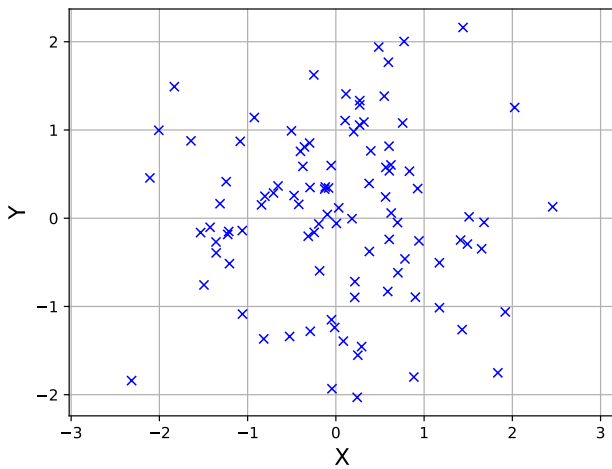


FIGURE 3 – 100 réalisations de  $(X, Y)$  :  $\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[Y] = 0$ ,  $\mathbf{V}(X) = \mathbf{V}(Y) = 1$ ,  $\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$ .

### Remarque 4.0.3.

La covariance donne une indication sur le sens de variation conjoint de deux variables.

Lorsque  $\mathbf{Cov}(X, Y) \geq 0$  (voir figure 4), alors  $X$  et  $Y$  ont tendance (« en moyenne ») à varier dans le même sens.

Lorsque  $\mathbf{Cov}(X, Y) \leq 0$  (voir figure 5), alors  $X$  et  $Y$  ont tendance (« en moyenne ») à varier dans le sens opposé.

Pour une analyse plus précise, on se référera à la partie suivante (HP).

### Proposition 4.0.4 (Propriétés élémentaires).

On a :

1.  $\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{Cov}(Y, X)$  ;
2.  $\mathbf{Cov}(X, X) = \mathbf{V}(X)$ .

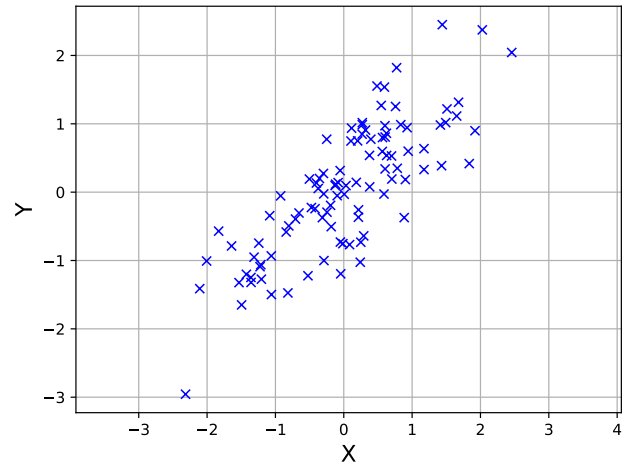


FIGURE 4 – 100 réalisations de  $(X, Y)$  :  $\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[Y] = 0$ ,  $\mathbf{V}(X) = \mathbf{V}(Y) = 1$ ,  $\mathbf{Cov}(X, Y) = \frac{4}{5}$ .

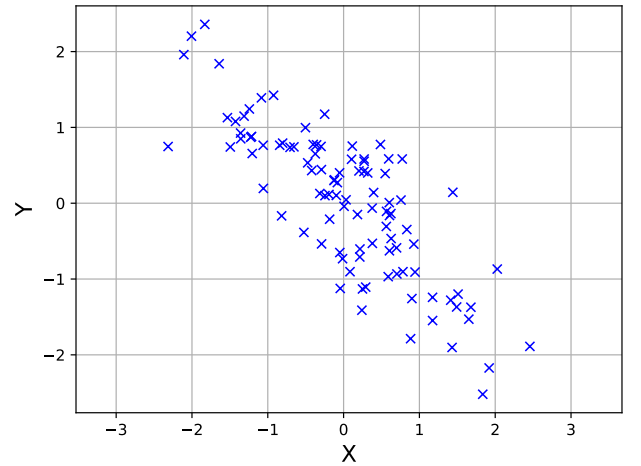


FIGURE 5 – 100 réalisations de  $(X, Y)$  :  $\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[Y] = 0$ ,  $\mathbf{V}(X) = \mathbf{V}(Y) = 1$ ,  $\mathbf{Cov}(X, Y) = -\frac{4}{5}$ .

### Démonstration.

Élémentaire. □

### Proposition 4.0.5 (Calcul effectif d'une covariance).

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$$

### Démonstration.

On part de la définition et on développe « à la Kœnig-Huygens » :

$$\begin{aligned} \mathbf{Cov}(X, Y) &= \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}(X))(Y - \mathbf{E}(Y))] \\ &= \mathbf{E}[XY - X\mathbf{E}(Y) - Y\mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)] \\ &= \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) \\ &\quad + \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) \\ &= \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y). \end{aligned}$$

□

**Remarque 4.0.6.**

La formule de transfert (appliquée sur le couple  $(X, Y)$  et à la fonction  $f : (x, y) \mapsto xy$ ) donne que

$$\mathbf{E}[XY] = \sum_{x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega)} xy P(X = x, Y = y).$$

Ainsi, on peut déterminer  $\mathbf{E}[XY]$  après avoir calculé la loi conjointe de  $X$  et de  $Y$ . On peut aussi déterminer les lois de  $X$  et de  $Y$ , donc leurs espérances, à partir de cette loi conjointe ! La loi conjointe de  $(X, Y)$  permet donc de déterminer  $\mathbf{Cov}(X, Y)$ .

**Exercice 4.0.7.**

Dans une urne, on a placé trois boules, numérotées de 1 à 3. On réalise deux tirages, sans remise. On note  $X$  et  $Y$  les deux numéros tirés.

Déterminer la loi conjointe de  $(X, Y)$ , puis la valeur de  $\mathbf{Cov}(X, Y)$ . Discuter de son signe.

**Proposition 4.0.8** (développement de la variance).  
Pour tout  $a, b \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathbf{V}(aX + bY) = a^2 \mathbf{V}(X) + 2ab \mathbf{Cov}(X, Y) + b^2 \mathbf{V}(Y).$$

**Démonstration.**

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(aX + bY) &= \mathbf{E}((aX + bY)^2) - (\mathbf{E}(aX + bY))^2 \\ &= \mathbf{E}(a^2 X^2 + 2abXY + b^2 Y^2) - (a\mathbf{E}(X) + b\mathbf{E}(Y))^2 \\ &= a^2 \mathbf{E}(X^2) + 2ab \mathbf{E}(XY) + b^2 \mathbf{E}(Y^2) \\ &\quad - a^2 \mathbf{E}(X)^2 - 2ab \mathbf{E}(X) \mathbf{E}(Y) - b^2 \mathbf{E}(Y)^2 \\ &= a^2 (\mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2) + 2ab (\mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X) \mathbf{E}(Y)) \\ &\quad + b^2 (\mathbf{E}(Y^2) - \mathbf{E}(Y)^2) \\ &= a^2 \mathbf{V}(X) + 2ab \mathbf{Cov}(X, Y) + b^2 \mathbf{V}(Y). \end{aligned}$$

□

**Corollaire 4.0.9.**

Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires indépendantes, alors

1.  $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X) \mathbf{E}(Y)$ ,
2.  $\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$ ,
3.  $\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$ .

**Démonstration.**

Le premier point est admis. Il entraîne immédiatement les deux autres. □

**Remarque 4.0.10.**

Cela signifie que deux variables aléatoires indépendantes sont décorréliées.



La réciproque est fausse. Considérons en effet  $X$  suivant la loi uniforme sur  $\{-1, 0, 1\}$  et  $Y = X^2$ . Calculez la loi de  $Y$ , et observez que

$$\mathbf{P}(X = -1, Y = 0) = 0 \neq \mathbf{P}(X = -1) \mathbf{P}(Y = 0).$$

Ainsi,  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes. Pour autant, on a  $XY = X^3 = X$ , et  $\mathbf{E}[X] = 0$ , donc

$$\mathbf{E}(XY) = 0 = \mathbf{E}(X) \mathbf{E}(Y).$$

Ainsi,  $X$  et  $Y$  sont décorréliées.

**Corollaire 4.0.11.**

Soit  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires indépendantes, alors

$$\mathbf{V}(X_1 + \dots + X_n) = \mathbf{V}(X_1) + \dots + \mathbf{V}(X_n).$$

**Démonstration.**

Par le lemme des coalitions,  $X_1 + \dots + X_{n-1}$  est indépendante de  $X_n$ , donc par le résultat précédent :

$$\mathbf{V}(X_1 + \dots + X_n) = \mathbf{V}(X_1 + \dots + X_{n-1}) + \mathbf{V}(X_n).$$

Il suffit ensuite de procéder par récurrence. □

**Corollaire 4.0.12.**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p \in [0, 1]$ , et  $X$  une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ .

Alors,  $\mathbf{V}(X) = np(1 - p)$ .

**Démonstration.**

Le variance ne dépendant de la loi d'une variable aléatoire, il suffit de considérer des variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  indépendantes et suivant la loi de Bernoulli de paramètre  $p$ . Ainsi,  $X_1 + \dots + X_n$  suit la même loi que  $X$ , et donc par linéarité de l'espérance

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{V}(X_i) = np(1 - p).$$

□

## 5. Corrélation entre deux variables (HP)

Cette partie est hors programme, et est présente à but culturel, afin de donner un sens au signe la covariance entre deux variables aléatoires.

Si  $\sigma(X) = 0$ , nous avons vu que  $X - \mathbf{E}[X]$  est certaine (et nulle), donc  $\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$ .

Si  $\sigma(X)$  et  $\sigma(Y)$  ne sont pas nuls, on définit le *coefficient de corrélation* de  $X$  et de  $Y$  par

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathbf{Cov}(X, Y)}{\sigma(X) \sigma(Y)}.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz (que nous verrons bientôt) permet de montrer deux résultats intéressants :

- ▷  $\rho(X, Y) \in [-1, 1]$  ;
- ▷ si  $|\rho(X, Y)| = 1$ , alors il existe  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tels que  $P(aX + bY = c) = 1$ , i.e.  $X$  et  $Y$  sont en relation affine.

On montre aussi facilement que, si l'on résout le *problème de régression affine de  $Y$  sur  $X$  par moindres carrés*, i.e. si l'on minimise en  $a, b \in \mathbb{R}$  la quantité :

$$\mathbf{E}[(Y - aX - b)^2],$$

alors le coefficient  $a$  optimal (c'est la pente de la droite de régression de  $Y$  sur  $X$ , voir figure 6) est

$$a = \frac{\mathbf{Cov}(X, Y)}{V(X)} = \rho(X, Y) \times \frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}.$$

Remarquons que, dans ce cas, effectuer la régression de  $Y$  sur  $X$  n'est pas la même chose que d'effectuer la régression de  $X$  sur  $Y$  !

Si  $X$  et  $Y$  sont centrées-réduites (en pratique, il convient souvent de centrer-réduire ses données avant d'effectuer un traitement statistique dessus), on s'aperçoit que

$$a = \rho(X, Y).$$

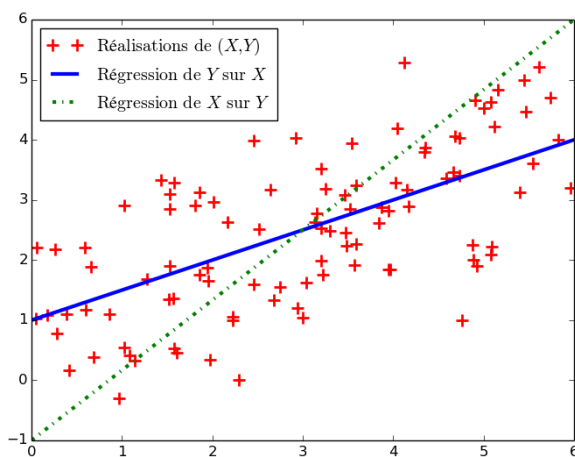


FIGURE 6 – Exemple de régression affine par moindres carrés, ici  $\rho(X, Y) = \sqrt{\frac{3}{7}} \approx 0,65$ .

Ainsi, si  $\mathbf{Cov}(X, Y) > 0$ ,  $X$  et  $Y$  varient globalement de concert : lorsque l'une augmente, l'autre a aussi tendance à augmenter.

## 6. Avec Python

La bibliothèque `random` contient un certain nombre de fonctions permettant d'effectuer des réalisations de variables aléatoires, des appels successifs de ces fonctions pouvant être considérés comme étant indépendants.

La notice du concours CCINP donne trois fonctions :

- ▷ `random()` : renvoie un nombre (flottant) « aléatoire » (comprendre : tiré uniformément) dans  $[0, 1[$  ;
- ▷ `randint(a,b)` : renvoie un nombre (entier) « aléatoire » (comprendre : tiré uniformément) dans  $\llbracket a, b \rrbracket$  ;
- ▷ `choice(L)` : envoie un objet « aléatoire » (comprendre : tiré uniformément) dans la liste  $L$ .

Une autre bibliothèque existe, utilisée par le concours Centrale-Supélec : `numpy.random`. Elle fournit la fonction `binomial(n,p)`, qui renvoie une réalisation de la loi binomiale de paramètres  $(n, p)$ . Avec  $n = 1$ , on obtient une réalisation de la loi de Bernoulli de paramètre  $p$ .

Un troisième paramètre dimensionnel permet de renvoyer un vecteur (ou une matrice) de réalisations. Testez cela avec l'exemple suivant.

```
1 import numpy.random as nrd
2 nrd.binomial(10, .2)
3 nrd.binomial(10, .2, 4)
4 nrd.binomial(10, .2, (3,4))
```

On peut aussi recoder cette fonction à partir des fonctions élémentaires de la bibliothèque `random` fournies par la notice CCINP.

```
5 import random as rd
6
7 def Bernoulli(p) :
8     X = rd.random()
9     if X < p :
10         return 1
11     else :
12         return 0
13
14 def binomiale(n, p) :
15     S = 0
16     for i in range(n) :
17         S = S+Bernoulli(p)
18     return S
```

## 7. Aide sur le vocabulaire

| Vocabulaire ensembliste                       | Notation               | Vocabulaire probabiliste                        |
|-----------------------------------------------|------------------------|-------------------------------------------------|
| Ensemble tout entier                          | $\Omega$               | Univers ; événement certain                     |
| Partie $A$ de $\Omega$                        | $A \subset \Omega$     | L'événement $A$ est réalisé                     |
| Ensemble vide                                 | $\emptyset$            | Événement impossible                            |
| Parties $A$ et $B$ disjointes                 | $A \cap B = \emptyset$ | Événements $A$ et $B$ incompatibles             |
| Complémentaire de $A$                         | $\overline{A}$         | Contraire de $A$ ; $A$ n'est pas réalisé        |
| $A$ est inclus dans $B$                       | $A \subset B$          | Si $A$ est réalisé, alors $B$ est aussi réalisé |
| $A$ privé de $B$                              | $A \setminus B$        | $A$ est réalisé, mais $B$ n'est pas réalisé     |
| Réunion de $A$ et de $B$                      | $A \cup B$             | $A$ est réalisé ou (inclusif) $B$ est réalisé   |
| Intersection de $A$ et de $B$                 | $A \cap B$             | $A$ est réalisé et $B$ est réalisé              |
| Réunion des événements $A_1, \dots, A_n$      | $\bigcup_{i=1}^n A_i$  | Au moins l'un des événements $A_i$ est réalisé  |
| Intersection des événements $A_1, \dots, A_n$ | $\bigcap_{i=1}^n A_i$  | Tous les événements $A_i$ sont réalisés         |

TABLE 1 – Correspondance entre les différents vocabulaires utilisés