

VI Éléments propres

Dans tout ce chapitre, on considérera que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et l'on identifiera les vecteurs colonnes (éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$) aux vecteurs de $\mathbb{K}^n$, ce qui revient à noter verticalement les n -uplets.

On rappelle que l'on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de taille $n \times n$, et $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de taille $n \times n$ qui sont inversibles. On notera I_n la matrice identité 0_n la matrice nulle, toutes deux de taille $n \times n$.

Enfin, E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, 0_E est le vecteur nul de E , et Id_E (voire Id , s'il n'y a pas d'ambiguïté) l'endomorphisme « identité » sur E (c'est la fonction $x \mapsto x$).

1 Sous-espaces vectoriels : compléments

Rappel 1.0.1.

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E , alors

$$F + G = \{ f + g \mid f \in F, g \in G \}.$$

On sait que $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E , que $F \subset F + G$ et que $G \subset F + G$.

Définition 1.0.2.

Soit $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E . On appelle *somme* des F_i l'ensemble

$$\sum_{i=1}^p F_i = \{ v_1 + \dots + v_p \mid v_1 \in F_1, \dots, v_p \in F_p \}.$$

On pourra aussi noter cette somme $F_1 + \dots + F_p$.

Remarque 1.0.3.

Autrement dit, un vecteur $v \in E$ appartient à $\sum_{i=1}^p F_i$ si et seulement s'il existe $v_1 \in F_1, \dots, v_p \in F_p$ tels que $v = v_1 + \dots + v_p$.

Proposition 1.0.4.

Soit $F_1, \dots, F_p$ des sev de E , alors $\sum_{i=1}^p F_i$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant chacun F_i .

Autrement dit, $\sum_{i=1}^p F_i$ est un sous-espace vectoriel de E contenant tous les F_i et, si F est un sous-espace

vectoriel tel que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $F_i \subset F$, alors $\sum_{i=1}^p F_i \subset F$.

Démonstration.

Admis □

Définition 1.0.5.

Soit $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E . On dit que les F_i sont *en somme directe* si, pour tout $v \in \sum_{i=1}^p F_i$, l'écriture $v = v_1 + \dots + v_p$ avec $v_1 \in F_1, \dots, v_p \in F_p$ est unique. Dans ce cas, on note

$$\bigoplus_{i=1}^p F_i = \sum_{i=1}^p F_i.$$

Remarque 1.0.6.

Si $p = 2$, on a la caractérisation utile : F_1 et F_2 sont en somme directe si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.



Cette propriété cesse d'être vraie pour $p \geq 3$.

Exercice 1.0.7.

Dans $E = \mathbb{R}^2$, on considère $F_1 = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $F_2 = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $F_3 = \text{Vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Représenter ces trois ensembles. Vérifier que F_1 , F_2 et F_3 sont deux à deux en somme directe, mais que la somme $F_1 + F_2 + F_3$ n'est pas directe.

Proposition 1.0.8.

Soit $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E . Alors les espaces $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe si et seulement si, pour tout $v_1 \in F_1, \dots, v_p \in F_p$, si $v_1 + \dots + v_p = 0_E$, alors $v_1 = \dots = v_p = 0_E$.

Remarque 1.0.9.

Autrement dit, il suffit de vérifier que la décomposition du vecteur nul sur la somme $F_1 + \dots + F_p$ est unique.

Démonstration.

Si la somme est directe, la décomposition de tout vecteur de E sur la somme $F_1 + \dots + F_p$ est unique, donc en particulier celle du vecteur nul.

Réciproquement, on suppose que l'unique décomposition du vecteur nul sur $F_1 + \dots + F_p$ est $0 + \dots + 0$. Soit $v \in F_1 + \dots + F_p$. Supposons que v admette deux décompositions : $v = v_1 + \dots + v_p = v'_1 + \dots + v'_p$, avec, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $v_i, v'_i \in F_i$. Alors, en soustrayant les deux décompositions, on obtient

$$0 = \underbrace{v_1 - v'_1}_{\in F_1} + \dots + \underbrace{v_p - v'_p}_{\in F_p}.$$

C'est une décomposition du vecteur nul sur $F_1 + \dots + F_p$, donc par unicité, tous les $v_i - v'_i$ sont nuls. Autrement dit la décomposition de v sur $F_1 + \dots + F_p$ est unique. $\square$

Exercice 1.0.10.

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et $\mathcal{D}_1 = \text{Vect}(v_1)$, $\mathcal{D}_2 = \text{Vect}(v_2)$, $\mathcal{D}_3 = \text{Vect}(v_3)$.

A-t-on $E = \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2 \oplus \mathcal{D}_3$?

Proposition 1.0.11.

Soit $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E . On suppose que l'on peut écrire $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$. Soit, pour chaque $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\mathcal{B}_i$ une base de F_i . Alors la famille $\mathcal{B}$ obtenue par concaténation des bases $\mathcal{B}_i$ est une base de E , dite *adaptée* à la décomposition $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$.

Exercice 1.0.12.

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel F , d'équations

$$\begin{cases} x + y + z - t = 0 \\ x + 2y + z + t = 0 \end{cases},$$

ainsi que les droites

$$\mathcal{D} = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}' = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On admet que $\mathbb{R}^4 = F \oplus \mathcal{D} \oplus \mathcal{D}'$.

Supposons qu'il existe un endomorphisme u de $\mathbb{R}^4$ tel que $\text{Ker}(u - \text{Id}) = F$, $\text{Ker}(u) = \mathcal{D}$ et $\text{Ker}(u + \text{Id}) = \mathcal{D}'$.

1. Quelle est la matrice de $u|_F$ dans n'importe quelle base de F ? Même question pour $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
2. Déterminer une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de u sera particulièrement simple.

2 Réductions des matrices

2.1 Éléments propres

Définition 2.1.1.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est une *valeur propre* de A s'il existe un vecteur $X \in \mathbb{K}^n$ **non nul** tel que $AX = \lambda X$.

Un tel vecteur X **non nul** est appelé *vecteur propre* de A associé à la valeur propre λ .

Remarque 2.1.2.

L'équation $AX = \lambda X$ est souvent appelée *équation aux éléments propres* de A .

Exercice 2.1.3.

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, montrer que $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de A , et déterminer les valeurs propres correspondantes. Montrer que $Y = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'est pas un vecteur propre de A .

Remarque 2.1.4.

Si X est un vecteur non nul, alors X est un vecteur propre de A si et seulement si AX et X sont colinéaires.

Dire qu'un vecteur non nul X est un vecteur propre de A revient à dire que la droite $\text{Vect}(X)$ est stable par l'endomorphisme canoniquement associé à A (c'est $X \mapsto AX$).

Définition 2.1.5.

L'ensemble des valeurs propres de A est appelé *spectre* de A , noté $\text{Sp}(A)$.

Exercice 2.1.6.

Montrer que $\text{Sp} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \{1, 2\}$.

Exemple 2.1.7.

Si $\lambda \in \mathbb{K}$, on a le cas très simple :

$$\text{Sp}(\lambda I_n) = \{\lambda\}.$$

Définition 2.1.8.

Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$. On appelle *sous-espace propre* de A associé à la valeur propre λ l'ensemble

$$\begin{aligned} E_\lambda(A) &= \{ X \in \mathbb{K}^n \mid AX = \lambda X \} \\ &= \text{Ker}(\lambda I_n - A). \end{aligned}$$

C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

Démonstration.

On a :

$$\begin{aligned} X \in E_\lambda(A) &\iff AX = \lambda X \\ &\iff \lambda X - AX = 0 \\ &\iff (\lambda I_n - A)X = 0 \\ &\iff X \in \text{Ker}(\lambda I_n - A). \end{aligned}$$

Ainsi, E_λ est un noyau, donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. $\square$

Remarque 2.1.9.

On a bien entendu :

$$E_\lambda(A) = \text{Ker}(\lambda I_n - A) = \text{Ker}(A - \lambda I_n).$$

Exercice 2.1.10.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer les sous-espaces propres de A .

Exercice 2.1.11.

Déterminer les éléments propres de $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Remarque 2.1.12.

Les éléments de $E_\lambda(A)$ sont tous les vecteurs propres de A associés à la valeur propre λ , ainsi que le vecteur nul (qui n'est pas un vecteur propre par définition).

Remarque 2.1.13 (Lien noyau - éléments propres). Considérons $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si $0 \in \text{Sp}(A)$, Le noyau de A est le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 ($\text{Ker}(A) = E_0$). Si $0 \notin \text{Sp}(A)$, cela s'écrit $\text{Ker}(A) = \{0\}$.

Notamment, $0 \in \text{Sp}(A)$ si et seulement si A n'est pas inversible.

De plus, si l'on a des scalaires $x_1, \dots, x_n$ vérifiant

$$x_1 C_1 + \dots + x_n C_n = 0,$$

alors, avec

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

on a $X \in \text{Ker}(A)$, donc, si X n'est pas nul, X est un vecteur propre de A .

Exercice 2.1.14.

La matrice suivante a une valeur propre et un vecteur propre évidents : lesquels ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque 2.1.15.

Notons s_i la somme des coefficients de la ligne n° i d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Alors, en notant U la colonne dont tous les coefficients valent 1,

$$AU = A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}.$$

Ainsi, si $s_1 = \dots = s_n$, en notant s cette valeur, alors $AU = sU$, donc s est une valeur propre de A , et U est un vecteur propre associé.

Exercice 2.1.16.

La matrice suivante a une valeur propre et un vecteur propre évidents : lesquels ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Proposition 2.1.17.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres deux à deux distinctes de A . Alors, les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}(A), \dots, E_{\lambda_p}(A)$ sont en somme directe.

Démonstration.

On procède par récurrence sur p , le nombre de sous-espaces propres considérés.

Le résultat est immédiat pour $p = 1$ (et même pour $p = 0$!). Pour $p = 2$, il s'agit d'une somme de deux espaces donc il suffit de montrer que $E_{\lambda_1}(A) \cap E_{\lambda_2}(A) = \{0\}$. Soit donc $X \in E_{\lambda_1}(A) \cap E_{\lambda_2}(A)$. Alors $AX = \lambda_1 X = \lambda_2 X$, donc $(\lambda_2 - \lambda_1)X = 0$, mais $\lambda_2 \neq \lambda_1$ donc $X = 0$. Ainsi $E_{\lambda_1}(A)$ et $E_{\lambda_2}(A)$ sont en somme directe.

Soit $p \in \mathbb{N}$. On suppose que toute somme de p sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe. On considère $p+1$ valeurs propres de A deux à deux distinctes, notées $\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1}$. Soit $X_1 \in E_{\lambda_1}(A), \dots, X_{p+1} \in E_{\lambda_{p+1}}(A)$. On suppose que

$$X_1 + \dots + X_{p+1} = 0. \quad (L_1)$$

Alors $A(X_1 + \dots + X_{p+1}) = 0$, c'est-à-dire $AX_1 + \dots + AX_{p+1} = 0$, soit

$$\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_{p+1} X_{p+1} = 0. \quad (L_2)$$

En effectuant la combinaison $\lambda_{p+1}(L_1) - (L_2)$ on a donc

$$\underbrace{(\lambda_{p+1} - \lambda_1)X_1}_{\in E_{\lambda_1}} + \dots + \underbrace{(\lambda_{p+1} - \lambda_p)X_p}_{\in E_{\lambda_p}} = 0.$$

Par hypothèse de récurrence, on a

$$(\lambda_1 - \lambda_{p+1})X_1 = \dots = (\lambda_p - \lambda_{p+1})X_p = 0.$$

Or, aucun des nombres $\lambda_{p+1} - \lambda_i$ n'est nul, car les valeurs propres sont deux à deux distinctes, on en déduit que

$$X_1 = \dots = X_p = 0$$

L'équation (L_1) s'écrit alors $X_{p+1} = 0$, ce qui achève la démonstration. $\square$

Remarque 2.1.18.

Notamment, si $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}$ sont des sous-espaces propres distincts deux à deux d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et si $n_i = \dim(E_i)$, alors

$$n_1 + \dots + n_p \leq n.$$

Exercice 2.1.19.

La matrice suivante a au moins une valeur propre évidente. Quelle est la dimension du sous-espace propre associé ? Combien A peut-elle avoir d'autres valeurs propres ? Que dire des éventuelles dimensions de leurs sous-espaces propres associés ?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.1.20.

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, ayant trois sous-espaces propres E_1, E_2, E_3 de dimensions n_1, n_2, n_3 .

Que valent n_1, n_2 et n_3 ?

2.2 Spectre et polynôme caractéristique**Remarque 2.2.1.**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

On a vu que λ est valeur propre de A si et seulement si $\text{Ker}(\lambda I_n - A) \neq \{0\}$, autrement dit si et seulement si $\lambda I_n - A$ n'est pas inversible. En utilisant le déterminant, on obtient la caractérisation suivante.

Remarque 2.2.2.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$\lambda \in \text{Sp}(A) \iff \det(\lambda I_n - A) = 0.$$

Définition 2.2.3.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle *polynôme caractéristique* de A la fonction

$$\chi_A : \begin{cases} \mathbb{K} & \longrightarrow \mathbb{K} \\ \lambda & \longmapsto \det(\lambda I_n - A) \end{cases}.$$

Proposition 2.2.4.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors χ_A est un polynôme unitaire de degré n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Démonstration.

Par récurrence sur n , en développant par rapport à la première colonne. $\square$

Théorème 2.2.5.

Les valeurs propres de A sont donc exactement les racines de χ_A .

Démonstration.

C'est juste une réécriture de 2.2.2. $\square$

Exemple 2.2.6.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer le polynôme caractéristique de A et en déduire son spectre.

Même question avec $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Remarque 2.2.7.

En particulier, une matrice de taille $n \times n$ possède au maximum n valeurs propres.

Lemme 2.2.8.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé.

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$A^k X = \lambda^k X.$$

Démonstration.

On le démontre par récurrence sur k . $\square$

Théorème 2.2.9.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, soit P un polynôme annulateur de A (i.e. tel que $P(A) = 0_n$). Alors, si λ est une valeur propre de A , on a $P(\lambda) = 0$ (i.e. toute valeur propre de A est racine de P).

Démonstration.

Soit $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. On a alors par définition

$$P(A) = \sum_{k=0}^n a_k A^k = 0,$$

donc

$$P(A)X = \sum_{k=0}^n a_k A^k X = \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k X = P(\lambda)X = 0.$$

Comme X est un vecteur propre, on a $X \neq 0$, donc $P(\lambda) = 0$. $\square$

Remarque 2.2.10 .

La réciproque de ce théorème est fautive. Lorsque l'on a obtenu un polynôme annulateur d'une matrice, on sait juste que les valeurs propres de cette matrice sont *parmi* les racines de ce polynôme.

Exercice 2.2.11.

Avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = X^2 - X - 6$, calculer $P(A)$.

Sans déterminer le polynôme caractéristique de A , en déduire les éléments propres de A .

Exercice 2.2.12.

Avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$ et $P(X) = X^3 + X^2 - X - 1$, calculer $P(A)$.

Déterminer le spectre de A , sans calculer son polynôme caractéristique.

Exemple 2.2.13 (éléments propres d'un projecteur).

Les valeurs propres d'une matrice de projecteur (*i.e.* d'une matrice A vérifiant $A^2 = A$) sont dans $\{0, 1\}$. Remarquons que I_n est une telle matrice, et a uniquement pour valeur propre 1, de même pour 0_n qui a uniquement pour valeur propre 0.

Exemple 2.2.14 (éléments propres d'une symétrie).

Les valeurs propres d'une matrice de symétrie (*i.e.* d'une matrice A vérifiant $A^2 = I_n$) sont dans $\{-1, 1\}$. Remarquons que I_n est une telle matrice, et a uniquement pour valeur propre 1, de même pour $-I_n$ qui a uniquement pour valeur propre -1 .

2.3 Multiplicité d'une valeur propre**Définition 2.3.1.**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On appelle *multiplicité* de λ en tant que valeur propre de A la multiplicité de λ en tant que racine de χ_A .

Remarque 2.3.2 (curiosité).

Ainsi, λ est valeur propre de multiplicité 0 de A si et seulement si λ n'est pas valeur propre de A .

Exercice 2.3.3.

Déterminer les multiplicités des valeurs propres des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -6 \\ -6 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 6 \\ 5 & -6 & 6 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Théorème 2.3.4.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Notons $m_\lambda(A)$ la multiplicité de λ en tant que valeur propre de A et $E_\lambda(A) = \text{Ker}(\lambda I_n - A)$ le sous-espace propre associé. Alors,

$$\dim(E_\lambda(A)) \leq m_\lambda.$$

Démonstration.

Sera prouvé en 3.0.7, utiliser ensuite le théorème 3.0.8. $\square$

Exercice 2.3.5.

Reprendre l'exercice 2.3.3, et déterminer les dimensions des sous-espaces propres de A et de B .

Remarque 2.3.6.

Si $\lambda \in \text{Sp}(A)$, on a $1 \leq \dim(E_\lambda(A)) \leq m_\lambda$.

3 Réduction des endomorphismes

Tout ce qui vient d'être dit pour les matrices carrées de taille n se retranscrit immédiatement pour les endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie égale à n .

Définition 3.0.1.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est une *valeur propre* de f s'il existe un vecteur $x \in E$ **non nul** tel que $f(x) = \lambda x$.

Un tel vecteur x **non nul** est appelé *vecteur propre* de f associé à la valeur propre λ .

Remarque 3.0.2.

Dire qu'un vecteur non nul x est un vecteur propre de f revient à dire que la droite $\text{Vect}(x)$ est stable par l'endomorphisme f .

Définition 3.0.3.

L'ensemble des valeurs propres de f est appelé *spectre* de f , noté $\text{Sp}(f)$.

Définition 3.0.4.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, soit $\lambda \in \text{Sp}(f)$. On appelle *sous-espace propre* de f associé à la valeur propre λ l'ensemble

$$\begin{aligned} E_\lambda(f) &= \{ x \in E \mid f(x) = \lambda x \} \\ &= \text{Ker}(\lambda \text{Id}_E - f) \\ &= \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E). \end{aligned}$$

C'est un sous-espace vectoriel de E .

Remarque 3.0.5.

Les éléments caractéristiques d'une projection sont les sous-espaces propres de la projection, associés aux valeurs propres 0 et 1 (sauf s'ils sont réduits à $\{0_E\}$, dans le cas de l'identité et de l'endomorphisme nul).

Les éléments caractéristiques d'une symétrie sont les sous-espaces propres de la projection, associés aux valeurs propres -1 et 1 (sauf s'ils sont réduits à $\{0_E\}$, dans le cas de Id_E et de $-\text{Id}_E$).

Définition 3.0.6.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On appelle *polynôme caractéristique* de f la fonction

$$\chi_f : \begin{cases} \mathbb{K} & \longrightarrow \mathbb{K} \\ \lambda & \longmapsto \det(\lambda \text{Id}_E - f) \end{cases}.$$

Proposition 3.0.7.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, on rappelle que $\dim(E) = n$. Le polynôme caractéristique χ_f est une fonction polynomiale unitaire et de degré n , et l'on a pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\lambda \in \text{Sp}(f) \Leftrightarrow \chi_f(\lambda) = 0.$$

De plus, si λ est de multiplicité $m_\lambda(f)$ dans χ_f , alors

$$\dim(E_\lambda(f)) \leq m_\lambda(f).$$

Démonstration (de $\dim(E_\lambda) \leq m_\lambda$).

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de E_λ , complétons-la en une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E . Remarquons que $p = \dim(E_\lambda(f))$. Alors, la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est de la forme (par blocs)

$$\begin{pmatrix} \lambda I_p & * \\ 0 & A \end{pmatrix},$$

où A est une matrice de taille $(n-p) \times (n-p)$. On a donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x\text{Id}_E - f) = \begin{pmatrix} (x-\lambda)I_p & * \\ 0 & xI_{n-p} - A \end{pmatrix}.$$

On obtient donc, pour tout $x \in \mathbb{K}$,

$$\chi_f(x) = \begin{vmatrix} (x-\lambda)I_p & * \\ 0 & xI_{n-p} - A \end{vmatrix}.$$

Ainsi, en développant successivement p fois ce déterminant par rapport à la première colonne, on a pour tout $x \in \mathbb{K}$:

$$\chi_f(x) = (x-\lambda)^p \chi_A(x).$$

Remarquons que le facteur $(x-\lambda)$ peut aussi apparaître dans $\chi_A(x)$. La multiplicité $m_\lambda(f)$ est l'exposant du facteur $(x-\lambda)$ dans $\chi_f(x)$. On a donc :

$$p \leq m_\lambda(f).$$

□

Théorème 3.0.8.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, soit $x \in E$, soit $\mathcal{B}$ une base de E , notons $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$.

Alors,

- ▷ f et A ont les mêmes valeurs propres (et donc le même spectre), avec les mêmes multiplicités ;
- ▷ x est un vecteur propre pour f si et seulement si X est un vecteur propre pour A , avec la même valeur propre associée ;
- ▷ $\chi_f = \chi_A$.

Démonstration.

Cela découle des formules sur les matrices représentant des objets, vues en première année. □

Remarque 3.0.9.

On utilise très souvent ce théorème : pour déterminer les éléments propres d'un endomorphisme, on passe à une représentation matricielle (si possible, la plus pertinente possible), et on lit tout dans cette dernière.

Exercice 3.0.10.

Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, on considère l'endomorphisme $\varphi: P \mapsto (X+1)P' + P$. Déterminer les valeurs propres de φ , leurs multiplicités et les sous-espaces propres correspondants.

4 Résolution numérique

Cette partie sera utile dans l'optique de l'oral « Mathématiques-Informatique » du concours Centrale-Supélec, ainsi qu'à l'oral de Mathématiques du concours CCINP. À vous de faire tourner ces exemples sur votre machine.

On peut utiliser la bibliothèque `numpy.linalg` pour effectuer les différents calculs d'éléments propres d'une matrice. Les matrices seront implémentées par des objets de type `array` fourni par `numpy`.

Par exemple, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

sera codée de la manière suivante.

```
1 import numpy as np
2 import numpy.linalg as la
3 A = np.array([[1., 2.],
4               [2., 1.]])
```

Le polynôme caractéristique de A peut alors s'obtenir par la fonction `poly`, qui renvoie la liste des coefficients de χ_A , triés par ordre décroissant de degré.

```
5 pol = poly(A)
```

La fonction `eigvals` renvoie un vecteur contenant les valeurs propres de A , tandis que la fonction `eig` renvoie un couple formé :

- ▷ du vecteur des valeurs propres de A (comme renvoyé par un appel de `eigvals(A)`) ;
- ▷ une matrice contenant les valeurs propres associées.

```
6 v1 = la.eigvals(A)
7 v2, P = la.eig(A)
```