

XII Probabilités sur un univers dénombrable

On considèrera ce chapitre plus comme une extension des notions vues en première année et en début d'année que comme une redéfinition du cadre des probabilités. On s'autorisera à utiliser toutes les notions et résultats vus précédemment : indépendance d'événements et de variables aléatoires, variables aléatoires de loi uniforme, de Bernoulli, binomiale (et toutes les propriétés vues à leur sujet), formule des probabilités totales *etc.*

Le cadre ne change pas non plus : un univers Ω (que l'on ne détaille pas) modélise les expériences aléatoires que l'on étudie ; des variables aléatoires construites sur Ω représentent les résultats aléatoires de ces expériences. On construit des événements en fonction de ces variables aléatoires. Une probabilité est définie sur Ω , ce qui permet ensuite de définir la notion de loi des variables aléatoires manipulées. Les hypothèses de modélisation que l'on est amené à poser portent toujours sur :

- ▷ les lois des variables aléatoires ;
- ▷ les données de lois conditionnelles et/ou d'indépendance (d'événements, de variables aléatoires).

1 Ensembles dénombrables

Définition 1.0.1.

Un ensemble E est dit *dénombrable* s'il existe une bijection $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow E$.

Remarque 1.0.2.

Un ensemble X est dénombrable si l'on peut numérotter ses éléments par des nombres entiers naturels, *i.e.* si on peut l'écrire

$$X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\},$$

où les x_n sont deux à deux distincts.

Exemple 1.0.3.

$\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont dénombrables, $\mathbb{R}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ne sont pas dénombrables.

Si $a < b$ sont deux réels, les intervalles $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ et $]a, b[$ ne sont pas dénombrables.

Remarque 1.0.4.

Une partie d'un ensemble dénombrable est finie ou dénombrable. Une intersection d'ensembles dénombrables est (finie ou) dénombrable. Une union ou un produit cartésien (finis) d'ensembles dénombrables est (finie ou) dénombrable.

2 Langage des probabilités

Dans toute cette partie, Ω est un ensemble fini ou dénombrable, appelé *l'univers*. Cet univers modélise toujours l'ensemble des réalisations possibles pour l'expérience aléatoire que l'on étudie.

Définition 2.0.1.

Un *événement* est une partie de l'univers.

2.1 Événements

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements.

Définition 2.1.1 (conjonction d'événements).

L'événement

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n = \{ \omega \in \Omega \mid \forall n \in \mathbb{N}, \omega \in A_n \}$$

est l'événement qui se réalise si et seulement si tous les A_n se réalisent.

Exemple 2.1.2.

On considère une suite infinie de lancers d'un dé à six faces. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n l'événement « le n^e lancer donne un six ».

L'événement $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} S_n$ est l'événement « tous les lancers ont donné un six ».

L'événement $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \overline{S_n}$ est l'événement « aucun des lancers n'a donné un six ».

Définition 2.1.3 (disjonction d'événements).

L'événement

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \{ \omega \in \Omega \mid \exists n \in \mathbb{N}, \omega \in A_n \}$$

est l'événement qui se réalise si et seulement si au moins l'un des A_n se réalise.

Exemple 2.1.4.

On reprend l'exemple 2.1.2.

L'événement $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} S_n$ est l'événement « au moins un lancer a donné un six ».

Vocabulaire ensembliste	Notation	Vocabulaire probabiliste
Ensemble tout entier	Ω	Univers ; événement certain
Partie A de Ω	$A \subset \Omega$	L'événement A est réalisé
Ensemble vide	$\emptyset$	Événement impossible
Parties A et B disjointes	$A \cap B = \emptyset$	Événements A et B incompatibles
Complémentaire de A	$\overline{A}$	Contraire de A ; A n'est pas réalisé
A est inclus dans B	$A \subset B$	Si A est réalisé, alors B est aussi réalisé
A privé de B	$A \setminus B$	A est réalisé, mais B n'est pas réalisé
Réunion de A et de B	$A \cup B$	A est réalisé ou (inclusif) B est réalisé
Intersection de A et de B	$A \cap B$	A est réalisé et B est réalisé
Réunion des $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$	$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$	Au moins l'un des A_n est réalisé
Intesection des $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$	$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$	Tous les A_n sont réalisés

TABLE 1 – Correspondance entre les différents vocabulaires utilisés

Remarque 2.1.5.

On trouvera dans la table 1 une correspondance entre les deux vocabulaires utilisés.

Proposition 2.1.6 (règles de De Morgan).

On a :

$$\overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n},$$

$$\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}.$$

Exemple 2.1.7.

On reprend les exemples 2.1.2 et 2.1.4.

L'événement « au moins un lancer a donné un six » est le contraire de l'événement « aucun des lancers n'a donné un six ».

Exercice 2.1.8.

Écrire de deux manières différentes l'événement « tous les lancers donnent des résultats pairs ».

Définition 2.1.9 (sce).

La suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forme un *système complet d'événements* si les A_n sont deux à deux incompatibles et recouvrent Ω . Autrement dit, si

$$\forall i, j \in \mathbb{N}, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$$

et si

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \Omega.$$

Remarque 2.1.10.

La définition de système complet d'événements est toujours la même dans le cas d'une famille finie d'événements (et elle s'exprime de la même manière !). L'interprétation d'un système complet d'événements est toujours la même : exprimer toutes les issues possible d'une expérience aléatoire. Nous l'utiliserons de la même manière qu'auparavant : pour conditionner par rapport à ce système complet d'événements, notamment via la formule des probabilités totales.

Exemple 2.1.11.

On reprend l'exemple 2.1.2. Si l'on note P_n l'événement « on obtient le premier six au n^e lancer », soit formellement

$$P_n = S_n \cap \bigcap_{i=1}^{n-1} \overline{S_i},$$

et P_0 l'événement « on n'obtient jamais de six », soit formellement

$$P_0 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{S_n},$$

alors on peut montrer que la suite d'événements $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements. Nous aurons bientôt un outil pour justifier cela sans aucun effort.

2.2 Probabilités**Définition 2.2.1.**

On appelle *probabilité* sur Ω tout application $\mathbf{P}: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ telle que

$$\triangleright \mathbf{P}(\Omega) = 1 ;$$

▷ pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles, la série $\sum \mathbf{P}(A_n)$ converge et

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n).$$

Dans ce cas, on dit que $(\Omega, \mathbf{P})$ est un *espace probabilisé* dénombrable et, pour tout événement A , le nombre $\mathbf{P}(A)$ est appelé *probabilité* de A .

Dans toute la suite du chapitre, $(\Omega, \mathbf{P})$ désigne un espace probabilisé dénombrable.

Les propriétés élémentaires sont les mêmes que celles que vous avez vues en TSI1.

Proposition 2.2.2.

Soit A, B deux événements. Alors :

1. $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$;
2. $\mathbf{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$;
3. $\mathbf{P}(B \setminus A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$;
4. si $A \subset B$, alors $\mathbf{P}(B \setminus A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)$;
5. si $A \subset B$, alors $\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B)$;
6. $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$.

Remarque 2.2.3.

Si l'univers Ω est infini, les événements élémentaires ne sont pas équiprobables.

Exercice 2.2.4.

On reprend les notations de l'exemple 2.1.11.

Déterminer $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} P_n\right)$ et $\mathbf{P}(P_0)$. Qu'est-ce que cela signifie ?

3 Conditionnement et indépendance

Définition 3.0.1.

Soit A, B deux événements. Si $\mathbf{P}(B) \neq 0$, on définit la *probabilité conditionnelle* de A sachant B par

$$\mathbf{P}_B(A) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Ceci définit une probabilité $\mathbf{P}_B$ sur Ω .

Remarque 3.0.2.

On trouve aussi la notation $\mathbf{P}(A | B)$.

Démonstration.

$\mathbf{P}_B$ définit bien une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0, 1]$ (car pour tout $A \subset \Omega$, $0 \leq \mathbf{P}(A \cap B) \leq \mathbf{P}(B)$, donc $0 \leq \mathbf{P}_B(A) \leq 1$).

De plus, si $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles, alors $(B \cap A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est aussi une suite d'événements incompatibles, et comme

▷ pour tout $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq \mathbf{P}(B \cap A_i) \leq \mathbf{P}(A_i)$;

▷ la série $\sum_{i \geq 0} \mathbf{P}(A_i)$ converge

alors par comparaison de séries à termes positifs la série $\sum \mathbf{P}(B \cap A_i)$ est donc convergente, de somme

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} (B \cap A_i)\right) = \mathbf{P}\left(B \cap \left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i\right)\right).$$

Autrement dit, en divisant tout par $\mathbf{P}(B) > 0$, on en déduit l'égalité

$$\mathbf{P}_B\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{P}_B(A_i).$$

Ceci démontre que $\mathbf{P}_B$ est une probabilité. $\square$

Théorème 3.0.3 (Formule des probabilités composées, version élémentaire).

Soit A, B deux événements, vérifiant $\mathbf{P}(B) > 0$. Alors,

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}_B(A).$$

Démonstration.

Cela découle de la définition de la probabilité conditionnelle. $\square$

Corollaire 3.0.4 (Formule des probabilités composées, version avancée).

Soit $A_1, \dots, A_n$ une famille d'événements telle que $\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) > 0$. Alors

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) &= \mathbf{P}(A_1) \times \mathbf{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbf{P}_{A_2 \cap A_1}(A_3) \\ &\quad \times \dots \times \mathbf{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n) \\ &= \mathbf{P}(A_1) \prod_{i=2}^n \mathbf{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{i-1}}(A_i). \end{aligned}$$

Démonstration.

On peut d'abord voir que pour tout $2 \leq k \leq n$,

$$\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i \subset \bigcap_{i=1}^{k-1} A_i,$$

donc

$$0 < \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \leq \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} A_i\right),$$

donc les probabilités conditionnelles écrites ci-dessus ont bien un sens.

Ensuite, on démontre par récurrence finie que, pour tout $2 \leq k \leq n$,

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^k A_i\right) = \mathbf{P}(A_1) \prod_{i=2}^k \mathbf{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{i-1}}(A_i).$$

Pour $k = 2$, on retrouve exactement la formule des probabilités composées « élémentaire ». Pour l'hérédité, si $2 \leq k \leq n - 1$ et en supposant que

$$\mathbf{P}(A_1 \cap \dots \cap A_k) = \mathbf{P}(A_1) \prod_{i=2}^k \mathbf{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{i-1}}(A_i),$$

on utilise alors la formule des probabilités composées :

$$\mathbf{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{k+1}) = \mathbf{P}(A_1 \cap \dots \cap A_k) \mathbf{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_k}(A_{k+1}),$$

ce qui permet de conclure immédiatement au rang $k + 1$. La formule est donc bien valide au rang n . $\square$

Exercice 3.0.5.

Une urne contient initialement une boule rouge et une boule verte. On réalise une succession de tirages dans cette urne. À chaque fois que l'on tire une boule dans l'urne, on la remet et l'on ajoute dans l'urne une boule de la même couleur.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note R_n l'événement « on a tiré une boule rouge au n^{e} tirage »

1. Donner $\mathbf{P}(R_1)$.
2. Combien y a-t-il de boules dans l'urne lors du n^{e} tirage ?
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner $\mathbf{P}_{R_1 \cap \dots \cap R_n}(R_{n+1})$.
4. Calculer $\mathbf{P}(R_1 \cap \dots \cap R_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Rappel 3.0.6 (Formule des probabilités totales de sup).

Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles. Alors, si B est un événement,

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i) \mathbf{P}_{A_i}(B).$$

En particulier, si $n = 2$, et si A est un événement,

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A) \mathbf{P}_A(B) + (1 - \mathbf{P}(A)) \mathbf{P}_{\bar{A}}(B).$$

Théorème 3.0.7 (Formule des probabilités totales, version infinie).

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système complet d'événements. Alors, si B est un événement, la série $\sum \mathbf{P}(B \cap A_n)$ converge et

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(B \cap A_n).$$

De plus, si les événements A_n sont tous non négligeables (pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(A_n) > 0$), alors

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n) \mathbf{P}_{A_n}(B).$$

Démonstration.

On peut écrire (voir la figure 1)

$$B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (B \cap A_n).$$

Montrons que les $B \cap A_n$ sont deux à deux incompatibles. Soit $i, j \in \mathbb{N}$ vérifiant $i \neq j$. On a alors

$$(B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = B \cap (A_i \cap A_j) = B \cap \emptyset = \emptyset.$$

Par la définition d'une probabilité, la série $\sum_{n \geq 0} \mathbf{P}(B \cap A_n)$

converge donc. On a aussi, toujours par définition d'une probabilité, que

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(B \cap A_n).$$

On conclut par définition de la probabilité conditionnelle. $\square$

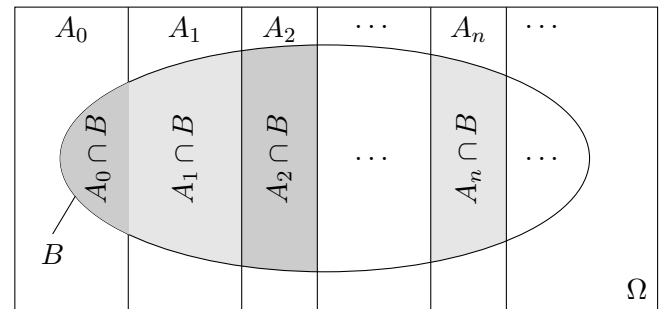


FIGURE 1 – Illustration de la formule des probabilités totales

Remarque 3.0.8.

La première écriture de la formule des probabilités totales est valide même s'il existe $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $\mathbf{P}(A_n) = 0$. Dans ce cas, $\mathbf{P}(B \cap A_n) = 0$, et l'on adopte souvent la convention suivante : $\mathbf{P}(A_n) \mathbf{P}_{A_n}(B) = 0$ lorsque $\mathbf{P}(A_n) = 0$, bien que la probabilité conditionnelle n'ait alors pas de sens.

Remarque 3.0.9.

La deuxième écriture de la formule des probabilités totales a le même sens que la version « finie » vue en TSI1 : $\mathbf{P}(B)$ est la moyenne des $\mathbf{P}_{A_n}(B)$, cette moyenne étant pondérée par les $\mathbf{P}(A_n)$.

Exercice 3.0.10.

On reprend l'exemple 2.1.11. On rappelle que, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est l'événement « on obtient le premier six au n^{e} lancer », et P_0 est l'événement « on n'obtient jamais de six ».

Lorsque l'on obtient le premier six au bout de n lancers (on note alors $X = n$), on lance immédiatement un dé à n faces, et l'on note Y le résultat. Si l'on ne tire aucun six, on convient que $Y = 0$.

1. Modéliser cela par des données de lois conditionnelles.

2. Écrire la probabilité $\mathbf{P}(Y = 1)$ comme une somme de série.
3. Calculer $\mathbf{P}(Y = 1)$.
4. Généraliser cela en donnant la loi de Y .

Proposition 3.0.11 (Formule de Bayes).

Si A et B sont deux événements de probabilités non nulles, alors

$$\mathbf{P}_B(A) = \frac{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}_{A|B}(B)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Démonstration.

Comme en TSI1. □

Remarque 3.0.12.

On utilisera souvent la formule des probabilités totales pour calculer le dénominateur, $\mathbf{P}(B)$.

Exercice 3.0.13.

On reprend l'exercice 3.0.10. On observe *a posteriori* que $Y = 1$.

Quelle est la probabilité d'avoir tiré un six au premier lancer, dans la première partie de l'expérience ?

Définition 3.0.14.

Deux événements A et B sont dits *indépendants* si $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)$.

Remarque 3.0.15.

On note (parfois) $A \perp B$ pour signifier que A et B sont indépendants.

Remarque 3.0.16.

En d'autres termes, si A et B sont de probabilités non nulles,

$$A \perp B \Leftrightarrow \mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A) \Leftrightarrow \mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B).$$

Exercice 3.0.17.

On reprend l'exercice 3.0.10. Les événements $[X = 1]$ et $[Y = 1]$ sont-ils indépendants ?

Proposition 3.0.18.

Si A et B sont indépendants, alors $\bar{A}$ et B , $\bar{A}$ et $\bar{B}$, A et $\bar{B}$ le sont aussi.

Démonstration.

On le démontre pour $\bar{A}$ et B .

On a

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}((A \cup \bar{A}) \cap B) = \mathbf{P}((A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)).$$

Or, les événements $A \cap B$ et $\bar{A} \cap B$ sont incompatibles, donc

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(\bar{A} \cap B).$$

Comme A et B sont indépendants, on a

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(\bar{A} \cap B),$$

donc

$$\mathbf{P}(\bar{A} \cap B) = (1 - \mathbf{P}(A))\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(\bar{A})\mathbf{P}(B).$$

Ainsi, $\bar{A}$ et B sont indépendants. □

Définition 3.0.19.

Les événements $A_1, \dots, A_n$ sont *indépendants* si, pour toute partie I de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbf{P}(A_i).$$

Remarque 3.0.20.

On parle parfois d'événements *mutuellement* indépendants.

Remarque 3.0.21 (bonne nouvelle pour vous).

La notion d'indépendance pour une famille infinie d'événements n'est pas à votre programme.

Proposition 3.0.22.

Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'événements indépendants. Alors ;

1. Toute sous-famille de $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille d'événements indépendants.
2. Les $A_1, \dots, A_n$ sont deux à deux indépendants.
3. La propriété d'indépendance reste vraie si on remplace certains des A_i par leurs contraires.

Démonstration.

Admis □

Remarque 3.0.23.

Si l'on a plus de deux événements, l'indépendance deux à deux n'implique pas nécessairement l'indépendance (mutuelle).

Exemple 3.0.24.

On lance deux pièces équilibrées. On note les événements A : « la première pièce donne pile », B : « la deuxième pièce donne pile », C : « les deux pièces donnent le même résultat ».

Alors, les événements A, B, C ne sont pas indépendants, mais sont deux à deux indépendants.

4 Variables aléatoires discrètes

On rappelle qu'une variable aléatoire (réelle) est une application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Une telle variable aléatoire modélise la notion « d'objet aléatoire ».

Définition 4.0.1.

Une variable aléatoire définie sur un univers Ω fini ou dénombrable est dite *discrète*.

L'*image*, ou le *support*, de X est l'ensemble des valeurs prises par X . Formellement, c'est $X(\Omega)$.

Dans cette partie, l'univers est supposé fini ou dénombrable et toutes les variables aléatoires sont donc supposées discrètes.

Définition 4.0.2.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels, deux à deux distincts.

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, on appelle *loi (de probabilité)* de X la donnée, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, de la probabilité $\mathbf{P}(X = x_n)$.

Remarque 4.0.3.

Comme dans le cas des variables aléatoires finies, on procédera toujours de la manière suivante pour déterminer la loi d'une variable aléatoire X .

1. On détermine l'ensemble A dans lequel X prend ses valeurs.
2. Pour $x \in A$, on calcule $\mathbf{P}(X = x)$.
3. Si l'on reconnaît une loi connue, on la nomme.

Bien entendu, certaines situations mènent directement à des lois connues. Dans ce cas, les trois étapes sont immédiates.

Exercice 4.0.4.

On reprend l'exemple 2.1.11. On rappelle que l'on lance successivement un dé à six faces : pour $i \geq 1$, D_i est la variable aléatoire donnant le résultat du i^e lancer.

On note X le rang d'obtention du premier six, et Z le rang d'obtention du deuxième six, X valant 0 si aucun six n'est tiré.

1. Rappeler la loi de X .
2. Justifier, au moins intuitivement, que Z est correctement définie.
3. Donner la loi de Z , en procédant de deux manières différentes.

Proposition 4.0.5 (système complet d'événements canoniquement associé à X).

Soit X une variable aléatoire discrète. Les événements $(X = x)_{x \in X(\Omega)}$ forment un système complet d'événements de Ω .

Démonstration.

Si $x \neq y \in X(\Omega)$, alors $(X = x) \cap (X = y) = \emptyset$. De plus, par définition de $X(\Omega)$, on a $\Omega = \bigcup_{x \in X(\Omega)} (X = x)$. $\square$

Exercice 4.0.6.

On reprend la variable aléatoire X définie dans l'exercice 4.0.4. Si $X = n$, on lance une pièce qui donne pile avec probabilité $\frac{1}{5^{n-1}}$. On note $Y = 1$ si l'on a obtenu pile, 0 sinon.

Quelle est la loi de Y ?

Corollaire 4.0.7.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels, deux à deux distincts.

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = x_n) = 1.$$

Remarque 4.0.8 (légèrement HP).

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels, deux à deux distincts, $\Xi = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ et une suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs positives telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$. Alors, il existe un espace probabilisé dénombrable $(\Omega, \mathbf{P})$ et une variable aléatoire définie sur Ω et à valeurs dans Ξ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X = x_n) = p_n$.

Exemple 4.0.9.

Comme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ et comme, pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{n(n+1)} \geq 0$, on peut définir une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et vérifiant

$$\forall n \geq 1, \mathbf{P}(X = n) = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Proposition 4.0.10.

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbf{P}(X \leq n) = \mathbf{P}(X \leq n-1) + \mathbf{P}(X = n).$$

Démonstration.

Il suffit de voir que $[X \leq n] = [X \leq n-1] \cup [X = n]$, et que cette union est disjointe. $\square$

Remarque 4.0.11.

Si X est une variable aléatoire réelle et si f est une fonction à réelle, alors on note $f(X) = f \circ X$, qui définit aussi une variable aléatoire réelle.

En pratique, on considérera X^2, X^3 , sans se poser aucune question à ce sujet...

5 Espérance et variance

5.1 Espérance

On suppose ici Ω dénombrable (le cas fini a été traité au chapitre 3). Soit X une variable aléatoire sur Ω , à valeurs dans une partie de $\mathbb{R}$:

$$X(\Omega) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\},$$

où $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels, deux à deux distincts

Définition 5.1.1.

On dit que X est d'espérance finie si la série

$$\sum x_n P(X = x_n)$$

est absolument convergente. Dans ce cas, on appelle *espérance* de X le nombre

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n).$$

Si $\mathbf{E}(X) = 0$, alors X est dite *centrée*.

Remarque 5.1.2.

On pourra comprendre la formule de l'espérance comme

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x).$$

On admet que $\mathbf{E}[X]$ ne dépend pas de l'ordre dans lequel on somme les éléments de $X(\Omega)$, ce qui est assuré par la convergence absolue de la série $\sum x_n P(X = x_n)$.

Remarque 5.1.3.

C'est exactement la même chose que dans le cas d'une variable aléatoire finie (vue en TSI1), si ce n'est que l'on rajoute la condition « la série $\sum x_n P(X = x_n)$ converge absolument ».

Remarque 5.1.4.

Si $X(\Omega)$ est un ensemble fini, alors la série est une somme finie, donc converge absolument : X est donc d'espérance finie.

Exercice 5.1.5.

Une variable aléatoire dont la loi est donnée dans l'exemple 4.0.9 a-t-elle une espérance ?

Exercice 5.1.6.

On reprend l'exercice 4.0.4. Déterminer l'espérance de X , puis de Z , après avoir montré leurs existences.

Proposition 5.1.7 (HP, mais utile).

Si X est bornée, alors X est d'espérance finie.

Démonstration.

Il existe donc $M \geq 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n| \leq M$.

Ainsi, $|x_n \mathbf{P}(X = x_n)| \leq M \mathbf{P}(X = x_n)$.

Comme la série $\sum \mathbf{P}(X = x_n)$ converge, la série $\sum M \mathbf{P}(X = x_n)$ converge aussi, donc, par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum x_n \mathbf{P}(X = x_n)$ converge absolument. $\square$

Proposition 5.1.8 (linéarité de l'espérance).

Si X, Y sont deux variables aléatoires d'espérances finies et si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $\lambda X + \mu Y$ est aussi d'espérance finie, et

$$\mathbf{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbf{E}(X) + \mu \mathbf{E}(Y).$$

Démonstration.

Admis $\square$

Exercice 5.1.9.

On reprend l'exercice 4.0.4. Quelle est la loi de $Z - X$? En déduire l'existence et la valeur de $\mathbf{E}(Z)$.

Remarque 5.1.10.

Si X est d'espérance finie, alors $X - \mathbf{E}(X)$ est centrée

Proposition 5.1.11 (positivité de l'espérance, HP).

Si X est positive et d'espérance finie, alors $\mathbf{E}(X) \geq 0$.

Théorème 5.1.12 (Formule de transfert).

Si $f: X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la série

$$\sum f(x_n) \mathbf{P}(X = x_n)$$

est absolument convergente. Dans ce cas,

$$\mathbf{E}[f(X)] = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n) \mathbf{P}(X = x_n).$$

Démonstration.

Admis $\square$

Remarque 5.1.13.

La formule de transfert peut se comprendre en

$$\mathbf{E}[f(X)] = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \mathbf{P}(X = x).$$

Exercice 5.1.14.

On reprend l'exercice 4.0.4. Étudier l'existence et la valeur de $\mathbf{E}(X^2)$.

5.2 Variance

Lemme 5.2.1.

Si X^2 est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie.

Démonstration.

Le lemme est trivial si X est une variable aléatoire finie. Supposons donc $X(\Omega)$ dénombrable et notons-le $X(\Omega) = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ avec des x_n deux à deux distincts. La variable aléatoire X^2 étant d'espérance finie, d'après le théorème de transfert, $\sum x_n^2 \mathbf{P}(X = x_n)$ est absolument convergente.

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 2|x| + 1 = (|x| - 1)^2 \geq 0$ donc $|x| \leq \frac{1}{2}(x^2 + 1)$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n \mathbf{P}(X = x_n)| \leq \frac{1}{2}(x_n^2 + 1) \mathbf{P}(X = x_n)$. Comme $\sum x_n^2 \mathbf{P}(X = x_n)$ et $\sum \mathbf{P}(X = x_n)$ convergent, on en déduit, par comparaison de séries à termes positifs, que $\sum x_n \mathbf{P}(X = x_n)$ converge absolument. Ainsi, X admet une espérance finie. $\square$

Définition 5.2.2.

Si X^2 est d'espérance finie, on appelle *variance* de X le réel

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])^2].$$

Démonstration.

On a $(X - \mathbf{E}[X])^2 = X^2 - 2\mathbf{E}[X]X + \mathbf{E}[X]^2$, et ces trois termes ont une espérance. $\square$

Remarque 5.2.3.

C'est exactement la même chose que dans le cas d'une variable aléatoire finie (vue en TSI1), si ce n'est que l'on rajoute la condition « la série $\sum x_n^2 \mathbf{P}(X = x_n)$ converge (absolument) ».

Remarque 5.2.4.

Au lieu de dire que X^2 est d'espérance finie, on préférera souvent dire que « X admet une variance finie ».

Proposition 5.2.5 (formule de Kœnig-Huygens).

Si X^2 est d'espérance finie, alors

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2.$$

Démonstration.

Comme en début d'année : poser $m = \mathbf{E}(X)$, et développer le carré. $\square$

Lemme 5.2.6.

Si X^2 est d'espérance finie, $\mathbf{V}(X) \geq 0$.

Démonstration.

Comme $(X - \mathbf{E}(X))^2$ est une variable aléatoire positive, son espérance est positive. $\square$

Définition 5.2.7.

Si X^2 est d'espérance finie, on appelle *écart-type* de X le nombre

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}.$$

Exercice 5.2.8.

On reprend l'exercice 4.0.4 : X est le rang d'apparition du premier 6 dans une succession de lancers de dés.

Montrer que X admet une variance, et la calculer.

Démonstration.

Par la propriété de positivité de l'espérance, toute variance est positive. $\square$

Proposition 5.2.9.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, si X admet une variance finie, alors $(aX + b)$ aussi et

$$\mathbf{V}(aX + b) = a^2 \mathbf{V}(X).$$

Démonstration.

On a $(aX + b)^2 = a^2 X^2 + 2abX + b^2$, donc $(aX + b)^2$ est d'espérance finie, comme combinaison linéaire de variables aléatoires qui admettent une espérance finie. Alors,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(aX + b) &= \mathbf{E}[(aX + b - \mathbf{E}[aX + b])^2] \\ &= \mathbf{E}[(a(X - \mathbf{E}[X]))^2] \\ &= a^2 \mathbf{V}(X). \end{aligned}$$

$\square$

Remarque 5.2.10.

Si X admet une variance finie, on dit que X est *réduite* si $\mathbf{V}(X) = 1$.

Si X admet une variance non nulle, alors $\frac{X - \mathbf{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée et réduite.

Théorème 5.2.11 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev).

Soit X une variable aléatoire admettant une variance. Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbf{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Démonstration.

On considère la variable aléatoire $Y = \varepsilon^2 \mathbf{1}_{|X - \mathbf{E}(X)| \geq \varepsilon}$: on a $Y = \varepsilon^2$ si $|X - \mathbf{E}(X)| \geq \varepsilon$ et $Y = 0$ sinon.

Remarquons que $B = \mathbf{1}_{|X - \mathbf{E}(X)| \geq \varepsilon}$ (variable aléatoire qui vaut 1 si $|X - \mathbf{E}(X)| \geq \varepsilon$ et 0 sinon) suit la loi de Bernoulli de paramètre $P(|X - \mathbf{E}(X)| \geq \varepsilon)$. Notamment, $Y = \varepsilon^2 B$.

Remarquons aussi que :

▷ $\mathbf{E}[B] = P(|X - \mathbf{E}(X)| \geq \varepsilon)$ donc $\mathbf{E}[Y] = \varepsilon^2 P(|X - \mathbf{E}(X)| \geq \varepsilon)$;
 ▷ on a toujours $0 \leq Y \leq (X - \mathbf{E}(X))^2$ (discuter selon si $|X - \mathbf{E}(X)| \geq \varepsilon$ ou non).

On a alors, par croissance de l'espérance,

$$0 \leq \mathbf{E}[Y] \leq \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}(X))^2],$$

ce qui est exactement le résultat demandé. $\square$

Remarque 5.2.12.

On utilise souvent l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec l'événement contraire :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X \in]\mathbf{E}(X) - \varepsilon, \mathbf{E}(X) + \varepsilon[) \\ &= \mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| < \varepsilon) \\ &= 1 - \mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geq \varepsilon) \\ &\geq 1 - \frac{\mathbf{V}(X)}{\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

Exercice 5.2.13.

On reprend l'exercice 4.0.4 : X est le rang d'apparition du premier six dans une succession de lancers d'un dé.

Déterminer un intervalle I qui contienne la valeur prise par une réalisation de X avec une probabilité d'au moins 95%.

6 Lois usuelles

6.1 Lois finies

Revoir les lois uniformes, de Bernoulli, binomiales.

6.2 Loi géométrique

Définition 6.2.1.

On dit que X suit la *loi géométrique* de paramètre $p \in]0, 1]$, et l'on note $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, si X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et si, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1}.$$

Démonstration.

On vérifie aisément que la série $\sum p(1 - p)^{k-1}$ converge et est de somme 1. $\square$

Théorème 6.2.2.

Si $p \in]0, 1]$ et si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors X admet une espérance et une variance (finies) et

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X) &= \frac{1}{p}, \\ \mathbf{V}(X) &= \frac{1 - p}{p^2}. \end{aligned}$$

Démonstration.

Posons $q = 1 - p \in [0, 1[$. Par multiplication par n^2 , la série entière $\sum n^2 x^{n-1}$ a le même rayon de convergence que $\sum x^{n-1}$, et donc que $\sum x^n$: ce rayon vaut 1.

Ainsi, la série $\sum n^2 q^{n-1}$ converge absolument, donc la série $\sum n^2 p q^{n-1}$ aussi, donc X^2 admet une espérance finie.

Ainsi, X admet une espérance et une variance finies.

Ensuite, on peut écrire

$$\frac{1}{1 - q} = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n,$$

et donc par dérivation terme à terme (valable, vu que $q \in]-1, 1[$ et vu que les séries entières écrites ici ont pour rayon de convergence 1) :

$$\frac{d}{dq} \left(\frac{1}{1 - q} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{dq} (q^n),$$

ce qui donne

$$\frac{1}{(1 - q)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n q^{n-1},$$

ou encore

$$\frac{1}{p^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n q^{n-1}.$$

En multipliant par p , on obtient

$$\frac{1}{p} = \sum_{n=1}^{+\infty} n p q^{n-1} = \mathbf{E}(X).$$

De même,

$$\frac{d^2}{dq^2} \left(\frac{1}{1 - q} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d^2}{dq^2} (q^n),$$

ce qui donne

$$\frac{2}{p^3} = \frac{1}{(1 - q)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) q^{n-2},$$

soit

$$\frac{2q}{p^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) p q^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) p q^{n-1}.$$

Par la formule de transfert, on a donc

$$\frac{2q}{p^2} = \mathbf{E}(X(X-1)) = \mathbf{E}(X^2 - X).$$

Ainsi, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(X^2) = \mathbf{E}(X^2 - X) + \mathbf{E}(X) = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{2 - p}{p^2}.$$

Par la formule de Kœnig-Huygens,

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = \frac{2 - p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1 - p}{p^2}.$$

$\square$

Proposition 6.2.3 (situation modélisée).

On considère une suite infinie d'épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p , numérotées à partir de 1. Alors, si l'on appelle X le rang (ou temps d'attente) du premier succès, X suit une loi géométrique de paramètre p .

Démonstration.

X est bien à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ (éventuellement, on pourrait avoir $X = +\infty$, mais on verra que cet événement est de probabilité nulle). Pour chaque $i \in \mathbb{N}^*$, notons A_i l'événement « la i^{e} épreuve de Bernoulli est un succès ». Alors si $n \geq 1$, $A_1, \dots, A_n$ sont des événements mutuellement indépendants et donc

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X = n) &= \mathbf{P}(\overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n) \\ &= \mathbf{P}(\overline{A_1}) \dots \mathbf{P}(\overline{A_{n-1}}) \mathbf{P}(A_n) \\ &= (1-p)^{n-1} p. \end{aligned}$$

On calcule $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n) = (1-p) \sum_{n=1}^{+\infty} p^{n-1} = 1$.

Ainsi, l'événement $[X = +\infty]$ est de probabilité nulle, et l'on peut considérer que X est une variable aléatoire réelle. $\square$

Exercice 6.2.4.

On lance un dé à six faces, jusqu'à obtenir un six. On note X le nombre de lancers réalisés. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{6}\right)$.

Exercice 6.2.5.

Soit $p \in]0, 1]$, $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, $a \in \mathbb{N}$. Calculer $\mathbf{P}(X > a)$. On pourra poser $q = 1 - p$.

Exercice 6.2.6.

Un professeur interroge au hasard des étudiants d'une classe, jusqu'à obtenir une réponse correcte. Chaque étudiant a une chance sur quatre de répondre correctement, indépendamment des autres étudiants.

En moyenne, combien de questions le professeur va-t-il poser ?

6.3 Loi de Poisson**Définition 6.3.1.**

On dit que X suit une *loi de Poisson* de paramètre $\lambda > 0$, et l'on note $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Démonstration.

On sait que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{\lambda^k}{k!} \geq 0$, et que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^\lambda$,

donc $\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = 1$. $\square$

Théorème 6.3.2.

Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors X admet une espérance et une variance (finies) et

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{V}(X) = \lambda.$$

Démonstration.

On sait que la série entière exponentielle $\sum \frac{\lambda^k}{k!}$ a un rayon de convergence infini, donc la série entière $\sum k^2 \frac{\lambda^k}{k!}$ aussi, donc pour tout $\lambda > 0$ la série $\sum k^2 \frac{\lambda^k}{k!}$ converge absolument.

Par multiplication par la constante $e^{-\lambda}$, la série $\sum k^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ converge absolument, donc X^2 admet une espérance finie, donc X admet une espérance et une variance finies.

On a ensuite

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} e^\lambda \\ &= \lambda, \end{aligned}$$

De même, par la formule de transfert,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X(X-1)) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1) e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda} e^\lambda \\ &= \lambda^2, \end{aligned}$$

ce qui permet d'obtenir, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(X^2) = \mathbf{E}(X(X-1)) + \mathbf{E}(X) = \lambda^2 + \lambda,$$

puis, par la formule de Kœnig-Huygens,

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

$\square$

Théorème 6.3.3 (Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson).

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels appartenant à $[0, 1]$ telle que $np_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda$. Soit (X_n) est une suite de variables aléatoires réelles définies sur Ω telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n suit la loi binomiale de paramètres (n, p_n) . Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{P}(X_n = k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Démonstration.

Si $k \in \mathbb{N}$ et si $n \geq k$, alors

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_n = k) &= \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \\ &= \frac{1}{k!} \frac{n!}{(n-k)!} p_n^k (1 - p_n)^{n-k}. \end{aligned}$$

Or,

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1) \cdots (n-k+1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^k,$$

donc

$$\mathbf{P}(X_n = k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{k!} n^k p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{(np_n)^k}{k!} (1 - p_n)^{n-k}.$$

De plus, $np_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda$, donc $p_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n}$, donc $p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $(1 - p_n)^k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, donc $(1 - p_n)^k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$.

On obtient donc

$$\mathbf{P}(X_n = k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\lambda^k}{k!} (1 - p_n)^n.$$

Or,

$$(1 - p_n)^n = \exp(n \ln(1 - p_n)),$$

et comme $p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on a

$$n \ln(1 - p_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -np_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\lambda,$$

donc, comme $-\lambda$ est une constante,

$$n \ln(1 - p_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\lambda,$$

donc par continuité de la fonction exponentielle

$$\begin{aligned} (1 - p_n)^n &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\lambda} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-\lambda}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_n = k) &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \end{aligned}$$

□

Remarque 6.3.4.

Voici une interprétation du résultat précédent, dans le cadre d'un processus de comptage, où l'on compte des réalisations d'événements aléatoires, par exemple :

- ▷ des désintégrations d'atomes radioactifs ;
- ▷ le nombre de clients se présentant à une caisse de supermarché ;
- ▷ le nombre d'erreurs typographiques sur une page d'un livre.

On considère un intervalle de temps $[a, b]$, que l'on découpe en n segments. Sur chaque segment de cette forme, on considère que l'on peut obtenir un seul événement avec probabilité $\frac{\lambda}{n}$, ou 0 événement sinon.

On ne peut donc obtenir plus de deux événements dans un petit intervalle de temps de cette forme. En effet, on suppose que le processus que l'on étudie est discret, et que deux événements que l'on compte finiront toujours par être séparés dans deux segments distincts de largeur $\frac{b-a}{n}$. Cela signifie aussi que, pour des petits segments, la probabilité d'obtenir un comptage dans ce segment est proportionnelle à ce segment. On suppose que les comptages dans deux segments distincts sont indépendants.

Alors, le nombre C_n d'événements comptés dans l'intervalle de temps $[a, b]$ suit la loi $\mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$. Ainsi, en notant P une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ ,

$$\mathbf{P}(C_n = k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(P = k).$$

La loi de Poisson est donc utilisée pour modéliser le nombre d'occurrences d'un événement sur un intervalle de temps donné lorsque les occurrences sont isolées les unes des autres (on parle aussi d'événements « rares »).

Remarque 6.3.5.

En pratique, cela signifie que pour de faibles valeurs de p et de grandes valeurs de n (typiquement $p \leq \frac{1}{10}$, $n \geq 30$), on peut approcher la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$.

7 Avec Python

Rappelons que la bibliothèque `numpy.random` fournit certaines fonctions permettant de réaliser des tirages de lois de probabilités, des appels successifs de ces fonctions pouvant être considérés comme des tirages indépendants. La notice du concours Centrale-Supélec fournit deux fonctions permettant de réaliser des tirages des lois vues dans ce chapitre et utilisant cette bibliothèque :

- ▷ `geometric(p)` renvoie une réalisation de la loi géométrique de paramètres p ;
- ▷ `poisson(lambda)` renvoie une réalisation de la loi de Poisson de paramètre `lambda`.

À chaque fois, un deuxième paramètre dimensionnel permet de renvoyer un vecteur (ou une matrice) de réalisations. Testez cela avec l'exemple suivant.

```
1 import numpy.random as nrd
2 nrd.poisson(2)
3 nrd.poisson(2,4)
4 nrd.poisson(2,(3,4))
5 nrd.geometric(.5,(3,4))
```

On peut aussi utiliser les fonctions élémentaires de la bibliothèque `random` utilisée par le concours CCINP pour simuler une loi géométrique.

```
6 import random as rd
7
8 def Bernoulli(p) :
9     X = rd.random()
10     if X < p :
11         return 1
12     else :
```

```
13         return 0
14
15 def geom(p) :
16     n = 1
17     b = Bernoulli(p)
18     while b != 1 :
19         n = n+1
20         b = Bernoulli(p)
21     return n
```