

XV Isométries des espaces euclidiens

Dans tout ce chapitre, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien, *i.e.* E est un espace vectoriel réel de dimension finie, sur lequel on a défini un produit scalaire, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

On notera n la dimension de E , et $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire défini sur E , *i.e.* pour tout $x \in E$:

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle.$$

Rappelons quelques résultats fondamentaux. Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E , si x, y sont deux vecteurs de E de coordonnées respectives $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ dans $\mathcal{B}$, *i.e.* si x et y vérifient

$$\begin{aligned} x &= x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, \\ y &= y_1 e_1 + \dots + y_n e_n, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= x_1 y_1 + \dots + x_n y_n, \\ \|x\|^2 &= x_1^2 + \dots + x_n^2. \end{aligned}$$

Avec

$$X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

et

$$Y = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

cela s'écrit

$$\langle x, y \rangle = X^T Y \quad \text{et} \quad \|X\|^2 = X^T X.$$

Proposition 0.0.1.

Si F est un sev de E , alors $E = F \oplus F^\perp$.

1. Isométries vectorielles de E

Définition 1.0.1.

Une *isométrie (vectorielle)* de E est un endomorphisme de E préservant la norme.

Plus formellement, c'est une application $f : E \rightarrow E$ qui est linéaire et qui vérifie :

$$\forall x \in E, \quad \|f(x)\| = \|x\|.$$

On note $O(E)$ l'ensemble des isométries de E , que l'on l'appelle *groupe orthogonal* de E .

Exercice 1.0.2.

On considère que $E = \mathbb{C}$, muni de sa structure euclidienne usuelle. Pour $\theta, \lambda \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{C}$, on considère les applications

$$\begin{aligned} r : z &\mapsto e^{i\theta} z, \\ t : z &\mapsto z + a, \\ h : z &\mapsto \lambda z, \\ c : z &\mapsto \bar{z}, \\ s : z &\mapsto e^{i\theta} \bar{z}. \end{aligned}$$

Parmi ces applications, lesquelles sont des isométries vectorielles de $\mathbb{C}$? Géométriquement, que représente chacune de ces applications (on calculera $s(e^{i\theta/2})$ et $s(ie^{i\theta/2})$) ?

Exercice 1.0.3.

On reprend l'exercice précédent. Que dire de la base $(1, i)$? Déterminer les matrices dans la base $(1, i)$ de r et de s .

Théorème 1.0.4.

Soit f un endomorphisme de E . Alors, f est une isométrie si et seulement si f préserve le produit scalaire, *i.e.* si et seulement si

$$\forall x, y \in E, \quad \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Démonstration.

Supposons que f préserve le produit scalaire. Soit $x \in E$, alors

$$\|f(x)\|^2 = \langle f(x), f(x) \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2,$$

donc $\|f(x)\| = \|x\|$, donc f est une isométrie.

Réciproquement, supposons que f est une isométrie. Soit $x, y \in E$. Alors, par l'identité de polarisation,

$$\begin{aligned} \langle f(x), f(y) \rangle &= \frac{1}{2}(\|f(x) + f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|f(x + y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \\ &= \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

□

Remarque 1.0.5.

Une isométrie est donc exactement une transformation linéaire conservant à la fois les distances et les angles non orientés.

Notamment, si f est une isométrie et si $x \perp y$, alors $f(x) \perp f(y)$.

Proposition 1.0.6.

Soit f une isométrie de E . Alors, f est un automorphisme de E .

Démonstration.

L'application f étant un endomorphisme de E , et comme E est de dimension finie, il suffit de montrer que f est injective, donc que $\text{Ker } f = \{0_E\}$.

Soit donc $x \in \text{Ker } f$. Alors $f(x) = 0_E$ donc $\|f(x)\| = 0$, mais $\|f(x)\| = \|x\|$ car f est une isométrie donc $\|x\| = 0$, autrement dit $x = 0_E$. L'application f est donc un automorphisme de E . $\square$

On peut retrouver ce résultat avec la proposition suivante, qui assure que 0 n'est pas valeur propre d'une isométrie.

Proposition 1.0.7.

Soit f une isométrie vectorielle de E et λ une valeur propre réelle de f . Alors, $|\lambda| = 1$.

Démonstration.

Soit λ une valeur propre de f , x un vecteur propre associé.

Alors, $f(x) = \lambda x$, donc

$$\|f(x)\| = |\lambda| \|x\| = \|x\|.$$

Comme x n'est pas nul, $|\lambda| = 1$. $\square$

Proposition 1.0.8 (groupe orthogonal).

L'ensemble $\mathcal{O}(E)$ est stable par composition et par passage à l'inverse, *i.e.* pour tout $f, g \in \mathcal{O}(E)$, alors $f \circ g \in \mathcal{O}(E)$ et $f^{-1} \in \mathcal{O}(E)$.

De plus, $\text{Id}_E \in \mathcal{O}(E)$.

Démonstration.

Soit $f, g \in \mathcal{O}(E)$. Soit $x \in E$. Alors

$$\|(g \circ f)(x)\| = \|g(f(x))\| = \|f(x)\| = \|x\|,$$

donc $g \circ f \in \mathcal{O}(E)$.

Soit $f \in \mathcal{O}(E)$ et $x \in E$. Alors

$$(f \circ f^{-1})(x) = x,$$

donc

$$\|(f \circ f^{-1})(x)\| = \|x\|.$$

Mais comme f est une isométrie,

$$\|(f \circ f^{-1})(x)\| = \|f(f^{-1}(x))\| = \|f^{-1}(x)\|,$$

donc $\|f^{-1}(x)\| = \|x\|$. Ainsi $f^{-1} \in \mathcal{O}(E)$.

Le fait que l'identité est une isométrie vectorielle est immédiat. $\square$

Théorème 1.0.9.

Soit f un endomorphisme de E , soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E .

Alors, f est une isométrie si et seulement si $f(\mathcal{B}) = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base orthonormée de E .

Démonstration.

Supposons que $f \in \mathcal{O}(E)$. Alors, pour tout $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

La famille $f(\mathcal{B})$ est donc une famille orthonormée de n vecteurs de E : autrement dit, c'est une base orthonormée.

Réciproquement, supposons que $f(\mathcal{B})$ est orthonormée. Soit $x \in E$, que l'on décompose sur $\mathcal{B}$:

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n.$$

Alors, par linéarité de f ,

$$f(x) = x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n),$$

mais comme $f(\mathcal{B})$ est orthonormée, on a par l'expression de la norme dans une base orthonormée :

$$\|f(x)\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 = \|x\|^2.$$

Ainsi, f est une isométrie. $\square$

Exercice 1.0.10.

On considère $\mathbb{R}^2$, muni de sa structure euclidienne usuelle, ainsi que l'endomorphisme

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}.$$

L'endomorphisme f est-il une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^2$?

Même question pour

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x+y \\ -x+y \end{pmatrix}$$

et pour

$$h : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+2y \\ 3x-y \end{pmatrix}.$$

Rappel 1.0.11.

Un sous-espace vectoriel F de E est stable par un endomorphisme f de E si :

$$\forall x \in F, \quad f(x) \in F.$$

Théorème 1.0.12.

Soit f une isométrie vectorielle de E , et F un sous-espace vectoriel de E .

Si F est stable par f , alors $F^\perp$ est aussi stable par f (*i.e.* pour tout $x \in F^\perp$, $f(x) \in F^\perp$).

Démonstration.

On a $f(F) \subset F$, mais comme f est un isomorphisme de E , si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ est une base de F , alors $f(\mathcal{B}) = (f(e_1), \dots, f(e_p))$ est une famille libre (par injectivité de f , cela se démontre aisément) de vecteurs de $f(F)$, qui engendre $f(F)$ (par linéarité de f), donc $f(\mathcal{B})$ est une base de $f(F)$. Ainsi, $\dim f(F) = \dim F$, et donc $F = f(F)$.

Autrement dit, l'endomorphisme f_F de F (défini par $f_F(x) = f(x)$) est un automorphisme de F . On pouvait aussi l'obtenir en observant que f_F est une isométrie vectorielle de F .

Soit $x \in F^\perp$, il s'agit de montrer que $f(x) \in F^\perp$. Soit $y \in F$. Comme $F = f(F)$, il existe $t \in F$ vérifiant $y = f(t)$.

On a alors

$$\langle f(x), y \rangle = \langle f(x), f(t) \rangle = \langle x, t \rangle,$$

la dernière égalité s'obtenant par le caractère d'isométrie de f .

Comme $x \in F^\perp$ et $t \in F$, on a $x \perp t$, donc

$$0 = \langle x, t \rangle = \langle f(x), y \rangle.$$

Ainsi, $f(x) \perp y$, et ce pour tout $y \in F$, donc $f(x) \in F^\perp$, donc $F^\perp$ est stable par f . $\square$

Exercice 1.0.13.

On se place dans $\mathbb{R}^3$, muni de sa structure euclidienne usuelle. On considère l'endomorphisme

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x - 2y - 2z \\ -2x + y - 2z \\ -2x - 2y + z \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer $f(\vec{u})$. Que peut-on en déduire sur $\mathcal{D} = \text{Vect}(\vec{u})$?
3. En déduire que le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + y + z = 0$ est stable par f .

Proposition 1.0.14.

Soit F un sev de E . Notons s la symétrie orthogonale par rapport à F (i.e. la symétrie par rapport à F et parallèlement à $F^\perp$).

Alors, s est une isométrie.

Démonstration.

On sait déjà que s est un endomorphisme de E .

Soit $x \in E$, écrivons $x = x_F + x_G$, où $x_F \in F$ et $x_G \in F^\perp$.

On a alors par le théorème de Pythagore, comme $x_F \perp x_G$:

$$\|x\|^2 = \|x_F\|^2 + \|x_G\|^2.$$

De plus, $s(x) = x_F - x_G$, donc pour la même raison :

$$\|s(x)\|^2 = \|x_F\|^2 + \|x_G\|^2 = \|x\|^2.$$

Par la positivité de la norme, $\|s(x)\| = \|x\|$, donc s est bien une isométrie vectorielle. $\square$

Lemme 1.0.15 (légèrement HP).

Si f est une isométrie de E (i.e. $f \in \text{O}(E)$), alors les sous-espaces vectoriels $E_1(f) = \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ et $E_{-1}(f) = \text{Ker}(f + \text{Id}_E)$ sont orthogonaux.

Démonstration.

Soit $x \in E_1(f)$ et $y \in E_{-1}(f)$: on a alors $f(x) = x$ et $f(y) = -y$.

Or, f étant une isométrie vectorielle, f préserve le produit scalaire, donc

$$\langle x, y \rangle = \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, -y \rangle = -\langle x, y \rangle.$$

On a donc bien $\langle x, y \rangle = 0$, donc $x \perp y$, ce qui était bien le résultat demandé. $\square$

Proposition 1.0.16.

Soit f une symétrie vectorielle de E . Alors, f est une symétrie orthogonale si et seulement si f est une isométrie de E .

Démonstration.

On sait déjà que si f est une symétrie orthogonale, alors f est une isométrie de E .

Réciproquement, si f est une symétrie vectorielle qui est aussi une isométrie de E , alors par le lemme précédent, $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ et $\text{Ker}(f + \text{Id}_E)$ sont orthogonaux, donc comme $E = \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f + \text{Id}_E)$, ces deux sous-espaces propres sont les orthogonaux l'un de l'autre, donc f est bien une symétrie orthogonale. $\square$

Définition 1.0.17.

Un *hyperplan* de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$.

Définition 1.0.18.

Une *réflexion* est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de E .

Notamment, toute réflexion est une isométrie.

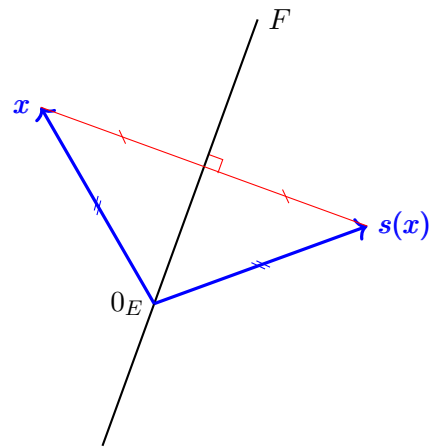


FIGURE 1 – Représentation d'une réflexion plane

Remarque 1.0.19 (voir figures 1 et 2).

Une réflexion est donc la généralisation de ce que vous avez appelé « symétrie », ou bien « symétrie axiale » dans les petites classes.

Si s est une réflexion par rapport à un hyperplan F , alors $x - s(x) \in F^\perp$. Comme $F^\perp$ est une droite vectorielle, si $x \notin F$, alors $x - s(x)$ est un vecteur directeur de $F^\perp$.

Exercice 1.0.20.

Dans $\mathbb{R}^2$, déterminer l'expression de la réflexion par rapport à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$.

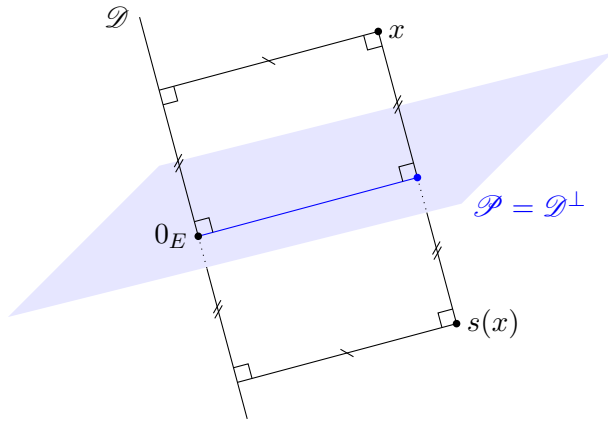


FIGURE 2 – Représentation d'une réflexion dans l'espace

2. Matrices orthogonales

2.1. Généralités et groupe orthogonal

Définition 2.1.1.

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *orthogonale* si $A^T A = I_n$.

On note $O_n(\mathbb{R})$, ou $O(n)$, l'ensemble des matrices orthogonales de taille n , appelé *groupe orthogonal* d'ordre n .

Exercice 2.1.2.

Si $\theta \in \mathbb{R}$, déterminer si $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ et

$S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ sont des éléments de $O_2(\mathbb{R})$.

Remarque 2.1.3.

A est donc orthogonale si et seulement si A est inversible et si $A^{-1} = A^T$. C'est donc équivalent à « $AA^T = I_n$ ».

On remarquera aussi que toute matrice orthogonale est par définition carrée.

Remarque 2.1.4.

Si A orthogonale, A^T est aussi orthogonale.

Proposition 2.1.5 (propriétés de groupe).

L'ensemble $O_n(\mathbb{R})$ est stable par produit et par passage à l'inverse, i.e si $M, N \in O_n(\mathbb{R})$, alors $MN \in O_n(\mathbb{R})$, M est inversible et $M^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$.

De plus, la matrice identité est orthogonale.

Démonstration.

Soit $M, N \in O_n(\mathbb{R})$. Alors,

$$(MN)^T MN = N^T M^T MN = N^T I_n N = N^T N = I_n,$$

donc $MN \in O_n(\mathbb{R})$. On sait déjà que M est inversible, et par la propriété de transposition d'une inverse :

$$(M^{-1})^T M^{-1} = (M^T)^{-1} \times M^T = I_n$$

On a enfin : $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $I_n^T I_n = I_n$, donc $I_n \in O_n(\mathbb{R})$. $\square$

Théorème 2.1.6.

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si ses vecteurs colonnes forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (pour le produit scalaire usuel).

Démonstration.

Notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A , et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Si $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a alors

$$(A^T A)_{i,j} = \langle C_i, C_j \rangle.$$

Or, la famille $(C_1, \dots, C_n)$ est orthonormée si et seulement si

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \langle C_i, C_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

C'est bien équivalent au fait que $A^T A = I_n$. $\square$

Corollaire 2.1.7.

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si ses vecteurs lignes forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ (pour le produit scalaire usuel).

Démonstration.

Il suffit d'appliquer le théorème précédent à A^T , dont les colonnes sont les transposées des lignes de A , en remarquant que A est orthogonale si et seulement si A^T l'est aussi. $\square$

Remarque 2.1.8.

Il est souvent plus efficace de vérifier que les colonnes forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (pour $n = 2$ ou $n = 3$) que de calculer le produit $A^T A$.

Exercice 2.1.9.

Parmi les matrices suivantes, déterminer lesquelles sont orthogonales.

$$1. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2. B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3. C = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$4. D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition 2.1.10.

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et $\mathcal{B}'$ une autre base de E . Alors, $\mathcal{B}'$ est orthonormée si et seulement si la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, notée $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, est orthogonale.

Démonstration.

Rappelons qu'une famille de vecteurs est une base orthonormée de E si et seulement si c'est une famille orthonormée de n vecteurs.

Par définition, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ a pour colonnes les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.

Si l'on note $C_1, \dots, C_n$ ces colonnes, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $e_1, \dots, e_n$ les vecteurs de $\mathcal{B}'$, $(\cdot | \cdot)$ le produit scalaire dans E , alors par l'expression du produit scalaire dans une base orthonormée on a pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$:

$$(e_i | e_j) = \langle C_i, C_j \rangle.$$

Ainsi, $(C_1, \dots, C_n)$ est une famille orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ si et seulement si $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille orthonormée de E . Comme on a deux familles de n éléments dans des espaces vectoriels de dimension n , ces deux familles sont deux bases orthonormées de leurs espaces, ou alors elles ne sont toutes les deux pas des bases orthonormées. On a donc l'équivalence demandée. $\square$

Exercice 2.1.11.

On reprend l'exercice 2.1.9. On considère la matrice A , on introduit la famille de ses colonnes :

$$\mathcal{C}_A = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

On introduit de mêmes les familles $\mathcal{C}_B$, $\mathcal{C}_C$ et $\mathcal{C}_D$ des colonnes de B , C et D respectivement.

Parmi ces familles, lesquelles sont des bases orthonormées de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$?

Théorème 2.1.12.

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors, $f \in \text{O}(E)$ si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \text{O}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration.

Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $C_1, \dots, C_n$ ses colonnes.

On sait que f est une isométrie vectorielle si et seulement si $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base orthonormée de E .

Si f est une isométrie vectorielle, alors $\mathcal{B}' = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base orthonormée de E , or M est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, donc par la proposition 2.1.10 M est une matrice orthogonale.

Réciproquement, si M est orthogonale, alors comme $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ et comme M est inversible, $\mathcal{B}'$ est une base de E , et M est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Ainsi, par la proposition 2.1.10, $\mathcal{B}'$ est une base orthonormée de E , donc f est orthogonale. $\square$

Exercice 2.1.13.

On reprend l'exercice 2.1.9. On note φ_A , φ_B , φ_C et φ_D les endomorphismes de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associés à A , B , C et D respectivement.

Par exemple,

$$\varphi_D : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x + z \\ y \\ x + z \end{pmatrix}.$$

Parmi ces endomorphismes, lesquels sont des isométries vectorielles ?

Exercice 2.1.14.

Retrouver le résultat de la première question de l'exercice 1.0.13 ainsi que ceux de l'exercice 1.0.10 à l'aide de ce résultat.

Théorème 2.1.15.

Pour toute matrice orthogonale M (i.e. $M \in \text{O}_n(\mathbb{R})$), $\det(M) \in \{-1, 1\}$.

Démonstration.

Pour tout $M \in \text{O}_n(\mathbb{R})$, on a $M^T M = I_n$, donc $\det(M^T) \det M = 1$, autrement dit $(\det M)^2 = 1$, d'où $\det M = \pm 1$. $\square$

Corollaire 2.1.16.

Pour toute isométrie f de E (i.e. $f \in \text{O}(E)$), on a $\det(f) \in \{-1, 1\}$.

Démonstration.

Soit $f \in \text{O}(E)$, $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E . Alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \text{O}_n(\mathbb{R})$, donc par ce qui précède,

$$\det(f) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) \in \{-1, 1\}.$$

 $\square$ **2.2. Groupe spécial orthogonal****Définition 2.2.1.**

Une matrice orthogonale est dite *positive* si son déterminant vaut 1, et *négative* sinon.

L'ensemble des matrices orthogonales positives (i.e. de déterminant 1) est appelé *groupe spécial orthogonal*, noté $\text{SO}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2.2.2.

On reprend l'exercice 2.1.9.

Parmi les matrices orthogonales, quelles sont celles dans $\text{SO}_3(\mathbb{R})$?

Remarque 2.2.3.

Pour tout $n \geq 1$, il existe des matrices orthogonales de déterminant 1 (I_n par exemple) et de déterminant -1 (par exemple la matrice diagonale dont tous les coefficients valent 1 sauf le premier qui vaut -1).

Le produit de deux matrices de $SO_n(\mathbb{R})$, l'inverse d'une matrice de $SO_n(\mathbb{R})$ sont toujours dans $SO_n(\mathbb{R})$: $SO_n(\mathbb{R})$ est stable par produit et par passage à l'inverse, et contient I_n .

Définition 2.2.4.

Une isométrie vectorielle est dite *directe* si son déterminant vaut 1, et *indirecte* sinon. L'ensemble des isométries directes de E est appelé *groupe spécial orthogonal* de E , noté $SO(E)$.

Exercice 2.2.5.

On reprend l'exercice 1.0.10.

Parmi ces endomorphismes, lesquels sont des isométries directes ? Indirectes ?

Même question avec l'isométrie de l'exercice 1.0.13.

Exercice 2.2.6.

On reprend l'exercice 1.0.2. Déterminer le caractère direct ou indirect des isométries de $\mathbb{C}$ que sont $\rho_\theta : z \mapsto ze^{i\theta}$, $c : z \mapsto \bar{z}$ et $s : z \mapsto e^{i\theta}\bar{z}$.

Exercice 2.2.7.

Une réflexion est-elle une isométrie directe ou indirecte ?

2.3. Orientation d'un espace euclidien

Orienter un espace euclidien E , c'est en choisir une base orthonormée $\mathcal{B}_0$ de référence. On considère ici qu'un tel choix a été fait : E est *orienté* par $\mathcal{B}_0$. D'après le paragraphe précédent, pour toute autre base orthonormée $\mathcal{B}$ de E , la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$ est orthogonale, donc de déterminant ± 1 .

Définition 2.3.1.

Une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E est dite *directe* si la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$ est de déterminant 1 (sinon, elle est dite *indirecte*).

Remarque 2.3.2.

On oriente le plus souvent $\mathbb{R}^3$ par la base canonique. Les bases directes sont alors celles dont les trois vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ sont orientés comme votre pouce, index et majeur de la main droite, respectivement.

Remarque 2.3.3.

On se place dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, orienté par sa base canonique, et l'on considère les familles $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{C}_C$ introduites par l'exercice 2.1.11 :

$$\mathcal{C}_A = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

et

$$\mathcal{C}_C = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Déterminer l'orientation de ces bases orthonormées.

Remarque 2.3.4.

Dans un espace euclidien orienté de dimension n , étant donné une famille $(v_1, \dots, v_{n-1})$ orthonormée, on peut toujours compléter cette famille en une base orthonormée $(v_1, \dots, v_n)$ de E . Comme $\text{Vect}(v_1, \dots, v_{n-1})^\perp$ est une droite vectorielle, il n'y a que deux choix possibles pour ce vecteur v_n , opposés l'un à l'autre.

Changer v_n en $-v_n$ change l'orientation de cette base. Il existe donc un seul choix du vecteur v_n rendant la base $(v_1, \dots, v_n)$ orthonormée directe.

Il existe donc deux orientations naturelles sur l'hyperplan $H = \text{Vect}(v_1, \dots, v_{n-1})$, en fonction du choix de v_n . Ce dernier vecteur v_n étant fixé, la base $(v_1, \dots, v_{n-1})$ (b.o.n. de H) est dite directe lorsque $(v_1, \dots, v_n)$ est une base orthonormée directe (b.o.n.d) de E .

Dans l'espace (que l'on peut identifier à $\mathbb{R}^3$), si $(\vec{u}, \vec{v})$ est une famille orthonormée de deux vecteurs, alors $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une b.o.n.d. de l'espace, et $(\vec{u}, \vec{v}, -\vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base orthonormée indirecte.

Proposition 2.3.5 (légèrement HP).

Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E et f une isométrie de E , alors la base orthonormée $f(\mathcal{B})$ est de même orientation que $\mathcal{B}$ si et seulement si l'isométrie f est directe.

Démonstration.

Admis

□

Remarque 2.3.6.

Cela signifie qu'une isométrie est directe si et seulement si elle préserve l'orientation des bases orthonormées (i.e. envoie une b.o.n.d. sur une b.o.n.d. et envoie une base orthonormée indirecte sur une base orthonormée indirecte).

Proposition 2.3.7.

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe de E et $\mathcal{B}'$ une base orthonormée de E . Alors $\mathcal{B}'$ est directe si et seulement si la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, notée $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, est positive.

Démonstration.Admis. $\square$

3. Diagonalisation des matrices symétriques réelles

Dans toute cette partie, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire usuel

$$\langle X, Y \rangle = X^\top Y.$$

Lemme 3.0.1.

Les valeurs propres complexes d'une matrice symétrique réelle sont toutes réelles.

Démonstration (Hors-programme).

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour une matrice M , on notera $\overline{M}$ la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de M . Remarquons que pour deux matrices M, N aux dimensions compatibles, on a $\overline{MN} = \overline{M} \cdot \overline{N}$ et $\overline{M^\top} = \overline{M}^\top$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A , et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé. Alors, $\bar{X}^\top AX$ est un nombre complexe, donc, comme A est symétrique,

$$\bar{X}^\top AX = (\bar{X}^\top AX)^\top = X^\top A^\top \bar{X} = X^\top A \bar{X}.$$

En conjuguant ceci, on obtient comme A est à coefficients réels (et donc $\bar{A} = A$),

$$\overline{\bar{X}^\top AX} = \bar{X}^\top \bar{A} X = \bar{X}^\top AX.$$

Ainsi, $\bar{X}^\top AX$ est un nombre réel.

Or, comme $AX = \lambda X$, on obtient

$$\bar{X}^\top AX = \lambda \bar{X}^\top X = \lambda \sum_{k=1}^n \bar{x}_k x_k = \lambda \sum_{k=1}^n |x_k|^2.$$

Comme X n'est pas nul, $\sum_{k=1}^n \bar{x}_k x_k$ est un réel strictement positif, donc en divisant par ce réel on obtient que λ est un nombre réel. $\square$

Théorème 3.0.2.

Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont deux à deux orthogonaux.

Démonstration.

Soit M une matrice symétrique réelle et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ deux valeurs propres distinctes de M . Alors, considérons $X \in E_\lambda = \text{Ker}(\lambda I_n - M)$ (soit $MX = \lambda X$) et $Y \in E_\mu = \text{Ker}(\mu I_n - M)$ (soit $MY = \mu Y$). On a

$$(MX)^\top Y = (\lambda X)^\top Y = \lambda \langle X, Y \rangle.$$

Mais, par ailleurs, M étant symétrique, $M^\top = M$ donc

$$(MX)^\top Y = X^\top M^\top Y = X^\top MY = \mu X^\top Y = \mu \langle X, Y \rangle$$

On a donc

$$\lambda \langle X, Y \rangle = \mu \langle X, Y \rangle,$$

mais comme $\lambda \neq \mu$, on en déduit que $\langle X, Y \rangle = 0$. Ainsi, ces deux sous-espaces propres E_λ et E_μ sont orthogonaux. $\square$

Théorème 3.0.3 (Théorème spectral).

Soit A une matrice symétrique et à coefficients réels. Alors, A est diagonalisable (sur $\mathbb{R}$) et il existe une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A .

Autrement dit, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que

$$A = PDP^\top \quad (= PDP^{-1}).$$

Démonstration.Admis. $\square$ **Exercice 3.0.4.**

Pourquoi la matrice suivante est-elle évidemment diagonalisable ?

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 7 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.0.5.

Sans aucun calcul, justifier que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable, et la diagonaliser.

Exercice 3.0.6.

Soit

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Cette matrice est diagonalisable, de manière évidente : pourquoi ?
2. Déterminer un vecteur propre évident de A .

3. On note φ_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A :

$$\varphi_A : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

Montrer que φ_A est diagonalisable, qu'il existe une base de diagonalisation de φ_A qui est orthonormée, et trouver un hyperplan de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ stable par φ_A .

Remarque 3.0.7.

Si A est symétrique réelle, si $A = PDP^\top$ (où P est orthogonale), alors P est une matrice dont les colonnes forment une *base orthonormée* de vecteurs propres de A .

Pour la déterminer, généralement :

- ▷ on remarque que A est symétrique et réelle, puis on invoque le théorème spectral ;
- ▷ on détermine les valeurs propres de A et leurs multiplicités ;
- ▷ on détermine une base orthonormée de chaque sous-espace propre de A (au pire, par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt).

On peut parfois accélérer le dernier point en utilisant le fait que les sous-espaces propres de A sont orthogonaux deux à deux.



Le « diagonalisable dans une base orthonormée » du théorème spectral ne signifie pas que toutes les bases de diagonalisation de A sont orthonormées (pensez au cas où $A = I_3$), mais qu'il existe au moins une base de diagonalisation orthonormée (à déterminer).

Exercice 3.0.8.

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que $A = PDP^\top$.

Exercice 3.0.9.

Soit $A = \begin{pmatrix} -7 & 4 & -4 \\ 4 & -1 & -8 \\ -4 & -8 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que A est diagonalisable.
2. Calculer le polynôme caractéristique de A .
3. En menant un seul calcul de vecteur propre, déterminer une base orthonormée de diagonalisation de A .

Nous pouvons enfin obtenir une caractérisation des symétries orthogonales.

Proposition 3.0.10.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E . Alors, f est une symétrie orthogonale si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est une matrice symétrique et orthogonale.

Démonstration.

Si f est une symétrie orthogonale, on sait déjà que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est orthogonale, car f est une isométrie. De plus, il existe une base orthonormée $\mathcal{B}'$ dans laquelle la matrice de f est diagonale (la diagonale étant composée de 1 et de -1). En notant $P = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ et D cette matrice diagonale, on obtient

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = PDP^{-1} = PDP^\top,$$

et l'on s'aperçoit que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)^\top = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est symétrique.

Réciproquement, si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est symétrique, alors par le théorème spectral, il existe une base orthonormée de diagonalisation de f , et comme f est orthogonale on observe que $\text{Sp}(f) \subset \{-1, 1\}$. Ainsi, il existe P orthogonale et D diagonale dont les coefficients diagonaux sont dans $\{-1, 1\}$ et telles que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = PDP^\top.$$

Comme $D^2 = I_n$, on obtient

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = PD^2P^\top = I_n,$$

donc f est une symétrie. Comme f est une isométrie, f est une symétrie orthogonale. $\square$

4. Classification des isométries du plan et de l'espace

Dans cette partie, on décrit tous les éléments des groupes $O_2(\mathbb{R})$ et $O_3(\mathbb{R})$.

4.1. Isométries du plan

Théorème 4.1.1 (classification des matrices orthogonales d'ordre 2).

Soit $M \in O_2(\mathbb{R})$.

- ▷ Si $\det(M) = 1$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$M = R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

On dit que M est la *matrice de rotation* d'angle θ .

- ▷ Si $\det(M) = -1$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$M = S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

Démonstration.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$. Alors les vecteurs colonnes de

M forment une b.o.n. de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, donc (on peut aussi écrire $M^\top M = I_2$ pour obtenir ces équations) :

$$\begin{cases} ab + cd = 0 \\ a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \end{cases}.$$

Ainsi, il existe $\theta, \rho \in \mathbb{R}$ tels que $a = \cos \theta, c = \sin \theta, b = \cos \rho, d = \sin \rho$. Alors,

$$\cos \theta \cos \rho + \sin \theta \sin \rho = 0,$$

i.e. $\cos(\theta - \rho) = 0$, i.e. $\theta = \rho + \frac{\pi}{2}[\pi]$. Ainsi,

$$\begin{cases} \cos \theta = \sin \rho \\ \sin \theta = -\cos \rho \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} \cos \theta = -\sin \rho \\ \sin \theta = \cos \rho \end{cases}.$$

Dans le premier cas $\det(M) = 1$, ce n'est possible que si $M \in \text{SO}_2(\mathbb{R})$, dans le second cas $\det(M) = -1$, ce n'est possible que si $M \in \text{O}_2(\mathbb{R}) \setminus \text{SO}_2(\mathbb{R})$. $\square$

Remarque 4.1.2.

La réciproque est clairement vraie : toutes les matrices d'une des formes ci-dessus sont bien dans $\text{O}_2(\mathbb{R})$, de déterminants 1 et -1 respectivement.

Théorème 4.1.3 (classification des isométries planes).

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 2.

- ▷ Si $f \in \text{SO}(E)$ (i.e. $\det(f) = 1$), alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$, unique à un multiple de 2π près, tel que, pour toute base orthonormée directe $\mathcal{B}$ de E , on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

On dit que f est la *rotation vectorielle* d'angle θ .

- ▷ Sinon, $\det(f) = -1$, considérons une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ de E . Alors, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

Notamment (voir figure 3), f est la réflexion par rapport à la droite

$$\mathcal{D} = \text{Vect} \left(\cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \vec{i} + \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \vec{j} \right).$$

Démonstration.

Supposons que $f \in \text{SO}(E)$, i.e. que f est une isométrie directe.

On montre par calcul matriciel que pour tout $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$:

$$R(\theta)R(\varphi) = R(\theta + \varphi).$$

Soit $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux b.o.n. directes de E . Alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \text{SO}_2(\mathbb{R})$, donc d'après le théorème précédent, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = R(\theta)$.

Alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = PR(\theta)P^{-1}$, où P est la matrice de passage $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$. Mais comme $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux b.o.n. directes, $P \in \text{SO}_2(\mathbb{R})$, et donc il existe $\rho \in \mathbb{R}$ tel que $P = R(\rho)$. On a ainsi :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = R(\rho)R(\theta)R(-\rho) = R(\rho + \theta - \rho) = R(\theta).$$

On démontre l'unicité de θ , à un multiple de 2π près : pour tout $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, on a $R(\theta_1) = R(\theta_2)$ si et seulement si $\cos(\theta_1) = \cos(\theta_2)$ et $\sin(\theta_1) = \sin(\theta_2)$, ce qui donne bien l'unicité demandée.

Sinon, f est une isométrie indirecte, donc si $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée de E , $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \text{O}_2(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale de déterminant -1 , il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

Avec $(\vec{u}, \vec{v})$ les vecteurs tels que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{pmatrix} \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) & -\sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \\ \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) & \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \end{pmatrix},$$

on peut vérifier (par calcul matriciel, ou bien en utilisant les calculs menés avec l'isométrie s introduite par l'exercice 1.0.2) que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthonormée de E , que $f(\vec{u}) = \vec{u}$ et que $f(\vec{v}) = -\vec{v}$.

Ainsi, f est bien la réflexion par rapport à $\mathcal{D} = \text{Vect}(\vec{u})$. $\square$

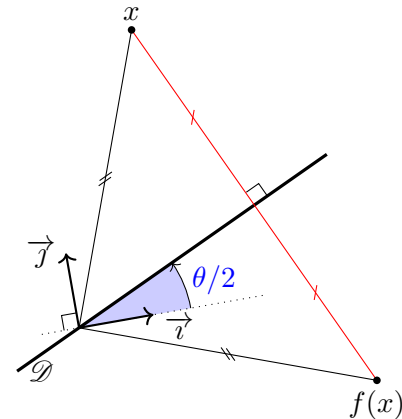


FIGURE 3 – Représentation d'une réflexion plane

Exercice 4.1.4.

On considère $\mathbb{R}^2$, muni de sa structure euclidienne usuelle, ainsi que les isométries

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$$

et

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x+y \\ -x+y \end{pmatrix}.$$

Quelles sont leurs natures géométriques ?

Remarque 4.1.5.

En dimension 2, les isométries (vectorielles) directes sont donc les rotations, et les isométries (vectorielles) indirectes sont les réflexions.

Corollaire 4.1.6 (caractérisation par les éléments propres).

Soit $f \in O(E)$, où E est un espace euclidien orienté de dimension 2.

- ▷ Si $f \in SO(E)$, alors soit $f = \pm \text{Id}_E$ (dans ce cas f a une valeur propre double, 1 ou -1 , le sous-espace propre associé étant de dimension 2), soit f n'a aucune valeur propre réelle.
- ▷ Sinon, f a pour valeurs propres 1 et -1 , qui sont simples, les sous-espaces propres associés étant de dimension 1.

Remarque 4.1.7 (détermination de l'angle d'une rotation plane).

Si $f \in SO(E)$ (où E est orienté et de dimension 2) : f est donc une rotation vectorielle, dont on note θ une mesure de l'angle. Il suffit de lire les valeurs de $\cos(\theta)$ et de $\sin(\theta)$ dans la matrice de f dans une base orthonormée directe quelconque.

On peut aussi les retrouver de manière plus abstraite, par le théorème précédent :

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2} \text{tr}(f).$$

Si $\vec{u}$ est un vecteur unitaire, on a pour toute base orthonormée directe $\mathcal{B}$:

$$\cos(\theta) = \langle u, f(u) \rangle, \quad \sin(\theta) = \det_{\mathcal{B}}(u, f(u)).$$

En effet, il suffit de considérer une b.o.n.d. de la forme (u, v) , et d'écrire la matrice de f dans cette base : elle est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

donc

$$\text{Mat}_{(u,v)}(u, f(u)) = \begin{pmatrix} 1 & \cos(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) \end{pmatrix},$$

d'où le résultat annoncé.

Remarque 4.1.8 (Détermination de l'axe d'une réflexion plane).

Si f est une réflexion plane, le théorème 4.1.3 donne une expression pour l'axe de la réflexion, utile lorsque l'on sait déterminer la quantité $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

Sinon, cet axe est tout simplement $E_1(f)$: on l'obtient en menant une recherche de sous-espace propre.

4.2. Isométries de l'espace

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 et f une isométrie de E .

Définition 4.2.1.

On appelle *rotation* toute isométrie directe de E , et *antirotation* toute isométrie indirecte de E .

Remarque 4.2.2.

Nous allons justifier la pertinence géométrique de ce vocabulaire dans cette partie.

Remarquons que le polynôme caractéristique χ_f de f est de degré 3 et à coefficients réels, il admet donc au moins une racine réelle. On sait de plus que $\text{Sp}(f) \subset \{-1; 1\}$, donc cette racine réelle est 1 ou -1 .

Considérons donc les sous-espaces vectoriels de E :

$$E_1 = \text{Ker}(\text{Id}_E - f) = \{x \in E \mid f(x) = x\},$$

$$E_{-1} = \text{Ker}(\text{Id}_E + f) = \{x \in E \mid f(x) = -x\}.$$

Au moins l'un de ces deux espaces n'est pas réduit à $\{0_E\}$: c'est donc un sous-espace propre de E . Nous allons discuter selon la dimension de E_{-1} .

a. Si $\dim E_{-1} = 0$

Proposition 4.2.3.

Si f est une isométrie de E n'admettant pas -1 pour valeur propre, alors il existe un vecteur $\vec{k}$ unitaire et un angle $\theta \in \mathbb{R}$, unique à 2π près étant donné $\vec{k}$, tels que, pour tout $(\vec{v}, \vec{j})$ tel que $\mathcal{B} = (\vec{v}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée directe de E ,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En notant $\mathcal{D} = \text{Vect}(\vec{k})$ (voir figure 4), alors f est appelée la *rotation* d'axe $\mathcal{D}$, dirigé et orienté par $\vec{k}$, et d'angle θ .

Démonstration.

Alors $\dim E_1 \geq 1$. Considérons donc $\vec{k}$ un vecteur de E_1 de norme 1, notons $\mathcal{D} = \text{Vect}(\vec{k})$ (c'est une droite), ainsi que $\mathcal{D} = \mathcal{D}^\perp$ (c'est un plan, orienté par $\vec{k}$).

Comme k est un vecteur propre de f , $\mathcal{D}$ est stable par f , donc $\mathcal{D} = \mathcal{D}^\perp$ est également stable par f . L'application f induit donc une isométrie $\tilde{f}$ du plan $\mathcal{D}$, qui est de dimension 2. D'après le paragraphe précédent, $\tilde{f}$ est soit une rotation, soit une réflexion.

Si $\tilde{f}$ était une réflexion, il existerait $x \in \mathcal{D}$ non nul tel que $f(x) = \tilde{f}(x) = -x$. Comme -1 n'est pas valeur propre de f , c'est impossible, on en déduit donc que $\tilde{f}$ est une rotation.

On sait donc qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$, unique à 2π près, telle que pour toute base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\mathcal{P}$,

$$\text{Mat}_{(\vec{i}, \vec{j})}(\tilde{f}) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Cela donne bien le résultat demandé. $\square$

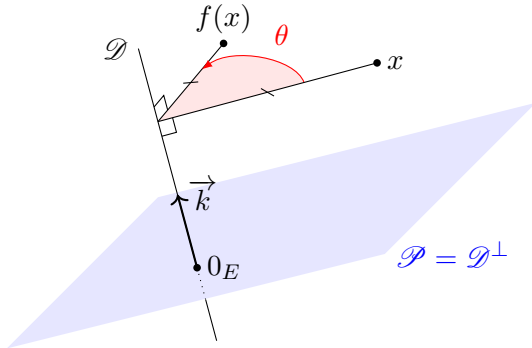


FIGURE 4 – Représentation d'une rotation dans l'espace

Remarque 4.2.4.

En dimension 3, pour décrire correctement une rotation, il est important d'orienter son axe (en en donnant un vecteur directeur). En effet, remplacer $\vec{k}$ par $-\vec{k}$ a pour conséquence de changer l'angle θ de la matrice de la proposition 4.2.3 en $-\theta$.

Remarque 4.2.5 (obtention de $\vec{k}$).

On a toujours $\vec{k} \in E_1(f)$. Si $\theta \neq 0 [2\pi]$, on a $E_1(f) = \text{Vect}(\vec{k})$.

Si $\theta = 0 [2\pi]$, alors $f = \text{Id}_E$. On pourra dire que toute droite est un axe de rotation pour la rotation Id_E .

Le cas particulier du demi-tour ($\theta = \pi [2\pi]$) sera bientôt traité.

Remarque 4.2.6.

Si f est une rotation d'angle θ , alors

$$\text{tr}(f) = 1 + 2\cos(\theta).$$

Remarquons aussi que, en reprenant les notations du théorème précédent,

$$\det_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}(\vec{i}, f(\vec{i}), \vec{k}) = \sin(\theta).$$

On admet que pour toute base orthonormée directe $\mathcal{C}$ de E , et pour tout vecteur $\vec{u} \notin \mathcal{D}$, alors

$$\det_{\mathcal{C}}(\vec{u}, f(\vec{u}), \vec{k})$$

a le même signe que $\sin(\theta)$.

Exercice 4.2.7.

L'application

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2x - y + 2z \\ 2x + 2y - z \\ -x + 2y + 2z \end{pmatrix}.$$

est une rotation. Déterminer un vecteur dirigeant et orientant son axe, et une mesure de son angle.

Exercice 4.2.8.

Déterminer la matrice dans la base canonique de la rotation d'axe dirigé et orienté par $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

b. Si $\dim E_{-1} = 1$

Proposition 4.2.9.

Si f est une isométrie de E dont -1 est une valeur propre simple, alors il existe un vecteur $\vec{k}$ unitaire et un angle $\theta \in \mathbb{R}$, unique à 2π près étant donné $\vec{k}$, tels que, pour tout $(\vec{i}, \vec{j})$ tel que $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée directe de E ,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

En notant $\mathcal{D} = \text{Vect}(\vec{k})$ et $\mathcal{P} = \text{Vect}(\vec{i}, \vec{j}) = \mathcal{D}^\perp$, alors f est la composée de la rotation r d'axe $\mathcal{D}$ et d'angle θ par la réflexion s par rapport à $\mathcal{P}$ (l'ordre de composition n'important pas, voir figure 5).

On parle parfois d'*antirotation* d'axe dirigé et orienté par $\vec{k}$ et d'angle θ .

Démonstration.

On considère un vecteur unitaire $\vec{k} \in E_{-1}$ et deux vecteurs $\vec{i}, \vec{j}$ tels que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ soit une b.o.n.d.

De la même façon que précédemment, $\mathcal{D} = \text{Vect}(\vec{k})$ est stable par f , qui induit donc une isométrie $\tilde{f}$ sur $\mathcal{P} = \text{Vect}(\vec{i}, \vec{j}) = \mathcal{D}^\perp$. On remarque que -1 n'est pas valeur propre de $\tilde{f}$, car sinon E_{-1} serait au moins de dimension 2, donc $\tilde{f}$ est une rotation, et l'on conclut de la même manière. $\square$

Remarque 4.2.10.

Si f est la composée d'une réflexion et d'une rotation d'angle θ , alors

$$\text{tr}(f) = -1 + 2\cos(\theta).$$

Remarquons aussi que, en reprenant les notations du théorème précédent,

$$\det_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}(\vec{i}, f(\vec{i}), \vec{k}) = \sin(\theta).$$

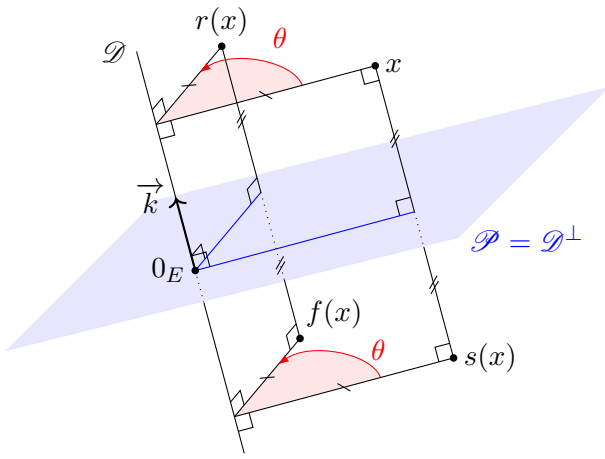


FIGURE 5 – Représentation de la composée d'une rotation r par une réflexion s dans l'espace

On admet que pour toute base orthonormée directe $\mathcal{C}$ de E , et pour tout vecteur $\vec{u} \notin \mathcal{D}$, alors

$$\det_{\mathcal{C}}(\vec{u}, f(\vec{u}), \vec{k})$$

a le même signe que $\sin(\theta)$.

Exercice 4.2.11.

L'application

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -y\sqrt{2} + z\sqrt{2} \\ x\sqrt{2} - y - z \\ -x\sqrt{2} - y - z \end{pmatrix}$$

est une antirotation. Déterminer un vecteur dirigeant et orientant son axe, ainsi qu'une mesure de son angle.

c. Si $\dim E_{-1} = 2$

Proposition 4.2.12.

Si f est une isométrie de E dont -1 est une valeur propre double, alors il existe un vecteur $\vec{k}$ unitaire, tel que, pour tout $(\vec{i}, \vec{j})$ tel que $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée directe de E ,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En notant $\mathcal{D} = \text{Vect}(\vec{k})$, alors f est appelée la rotation d'axe $\mathcal{D}$ et d'angle π (on parle parfois de *demi-tour* d'axe $\mathcal{D}$).

Démonstration.

On pose $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée de $\mathcal{D}^\perp = E_{-1}$ que l'on complète par un vecteur $\vec{k}$ de sorte à avoir une b.o.n.d.

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de E . Comme précédemment, $\mathcal{D} = E_{-1}$ est stable par f , donc $\mathcal{D} = \text{Vect}(\vec{k}) = (E_{-1})^\perp$ est stable par f . Ainsi, $\vec{k}$ est un vecteur propre de f . Mais comme $\vec{k} \notin E_{-1}$, nécessairement $\vec{k} \in E_1$ donc $f(\vec{k}) = \vec{k}$. $\square$

Remarque 4.2.13.

Nul besoin d'orienter $\mathcal{D}$ pour un demi-tour !

d. Si $\dim E_{-1} = 3$

Dans ce cas, $f = -\text{Id}_E$, l'isométrie f est la symétrie centrale par rapport à O_E . Dans n'importe quelle base $\mathcal{B}$ de E , on aura $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = -I_3$. C'est aussi, pour tout vecteur $\vec{k}$ unitaire, la composée de la rotation d'axe $\text{Vect}(\vec{k})$ et d'angle π avec la réflexion par rapport à $\mathcal{D} = \text{Vect}(\vec{k})^\perp$.

e. Résumé

On peut résumer les résultats obtenus précédemment dans le tableau suivant (qui est plus à comprendre qu'à retenir), qui donne la nature géométrique de f selon les dimensions de ses sous-espaces propres (lire « Rot. » pour rotation, « Réf. » pour réflexion et « A-Rot » pour anti-rotation, et l'on remarquera que l'on a colorié les cases en fonction du caractère direct ou non de l'isométrie.

		$\dim(E_1)$			
		0	1	2	3
$\dim(E_{-1})$	0		Rot.		Id_E
	1	A-Rot		Réf.	
	2		Rot. (1/2-tour)		
	3	$-\text{Id}_E$			

Théorème 4.2.14.

Si E est de dimension 3, toute isométrie de E est

- ▷ soit une rotation vectorielle, c'est alors une isométrie directe ;
- ▷ soit une anti-rotation, c'est alors une isométrie indirecte.

Remarque 4.2.15.

Plusieurs isométries peuvent sembler absentes de notre description mais sont en fait prises en compte : les réflexions (mais ce sont les composées de réflexions avec une rotation d'angle 0, voir figure 2) et les symétries orthogonales par rapport à une droite (mais ce sont les demi-tours d'axe cette droite).

On retiendra surtout le résultat suivant car, en pratique, on n'étudie pas les isométries Id_E et $-\text{Id}_E$.

Corollaire 4.2.16 (pratique).

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3, soit f est une isométrie de E qui n'est ni Id_E , ni $-\text{Id}_E$.

- ▷ Si f est directe, $\dim(E_1(f)) = 1$, f est une rotation d'axe $E_1(f)$.
- ▷ Si f est indirecte, $\dim(E_{-1}(f)) = 1$, f est une antirotation d'axe $E_{-1}(f)$.

Remarque 4.2.17.

L'identité est une rotation bien particulière : il n'y a pas unicité de l'axe, toute droite vectorielle en étant un axe. Certains auteurs considèrent même que ce n'est pas une rotation.

Il y a exactement la même ambiguïté sur $-\text{Id}_E$: qui est une anti-rotation pour tout axe.

Exercice 4.2.18.

Caractériser géométriquement l'application

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -8x + 4y + z \\ 4x + 7y + 4z \\ x + 4y - 8z \end{pmatrix}.$$

4.3. Méthodologie d'étude des isométries de $\mathbb{R}^3$

Pour un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que f est une isométrie vectorielle, en montrant le caractère orthonormé de l'image de la base canonique de f (ou des colonnes de la matrices de f dans la base orthonormée).
2. Calculer le déterminant de f , ou bien le produit vectoriel des deux premières colonnes de la matrice de f dans la base canonique.

Dans la suite, on suppose que $f \neq \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ et que $f \neq -\text{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

a. Méthodologie d'étude des isométries directes

Dans cette partie, on suppose que $\det(f) > 0$.

Ainsi, f est une rotation, et l'on détermine :

- ▷ un vecteur $\vec{k}$ qui dirige et oriente son axe ;
 - ▷ son angle θ (à un multiple de 2π près).
3. Déterminer un vecteur $\vec{k}$ vérifiant $f(\vec{k}) = \vec{k}$.
 4. Calculer $\cos(\theta) = \frac{\text{tr}(f) - 1}{2}$.

5. Prendre un vecteur $\vec{u}$ non colinéaire à $\vec{k}$, calculer $f(\vec{u})$ et déterminer $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, f(\vec{u}), \vec{k})$, où $\mathcal{B}$ est une base orthonormée directe quelconque : $\sin(\theta)$ est du même signe.
6. Déterminer θ .
7. Conclure : f est la rotation d'axe dirigé et orienté par $\vec{k}$, et d'angle θ .

Exercice 4.3.1.

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère l'endomorphisme f donc la matrice dans la base canonique est

$$M = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & -2 & 2 \\ 2 & 2 + \sqrt{2} & 2 - \sqrt{2} \\ -2 & 2 - \sqrt{2} & 2 + \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Déterminer la nature géométrique de f .

b. Méthodologie d'étude des isométries indirectes

Dans cette partie, on suppose que $\det(f) < 0$.

Ainsi, f est une rotation la composée d'une rotation et d'une réflexion (dont l'axe et le plan sont orthogonaux), et l'on détermine :

- ▷ un vecteur $\vec{k}$ qui dirige et oriente l'axe de la rotation, et qui est un vecteur normal au plan de la réflexion ;
 - ▷ son angle θ (à un multiple de 2π près).
3. Déterminer un vecteur $\vec{k}$ vérifiant $f(\vec{k}) = -\vec{k}$.
 4. Calculer $\cos(\theta) = \frac{\text{tr}(f) + 1}{2}$.
 5. Prendre un vecteur $\vec{u}$ non colinéaire à $\vec{k}$, calculer $f(\vec{u})$ et déterminer $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, f(\vec{u}), \vec{k})$, où $\mathcal{B}$ est une base orthonormée directe quelconque : $\sin(\theta)$ est du même signe.
 6. Déterminer θ .
 7. Conclure : f est la composée de la rotation d'axe dirigé et orienté par $\vec{k}$, et d'angle θ , par la réflexion par rapport à $\text{Vect}(\vec{k})^\perp$.

Exercice 4.3.2.

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère l'endomorphisme f donc la matrice dans la base canonique est

$$M = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & -1 & -\sqrt{6} \\ -1 & -3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & -2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la nature géométrique de f .