

VII Intégrales généralisées

Dans tout le chapitre, on notera $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, et $\mathbb{K}$ désigne soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{C}$.

On considère $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ (on suppose que $a < b$), ainsi que deux fonctions $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{K}$.

1 Intégrale généralisée d'une fonction

1.1 Définition

Définition 1.1.1.

On appelle *intégrale impropre* toute intégrale de la forme $\int_a^b f(t) dt$, où f est une fonction continue sur $]a, b[$, mais n'est pas définie ou continue sur $[a, b]$ tout entier.

On dit que l'intégrale admet une *singularité* en a (respectivement en b) si la fonction f n'est pas définie ou n'est pas continue en a (resp. en b).

Remarque 1.1.2.

C'est en particulier le cas dès que a ou b est une borne infinie. On a déjà traité le cas $\int_a^{+\infty} f(t) dt$, nous étendons dans ce chapitre les résultats obtenus précédemment.

Exercice 1.1.3.

Déterminer les singularités des intégrales suivantes.

1. $\int_0^{+\infty} te^{-t} dt$
2. $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$
3. $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(t+1)}$
4. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t(t+1)}$

Définition 1.1.4.

On considère une intégrale impropre $\int_a^b f(t) dt$.

1. Si l'unique singularité est en b , on dira que l'intégrale est *convergente* si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ admet une limite finie lorsque x tend vers b par valeurs inférieures. Dans ce cas, on notera

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} \int_a^x f(t) dt.$$

2. Si l'unique singularité est en a , on dira que l'intégrale est *convergente* si la fonction $x \mapsto \int_x^b f(t) dt$ admet une limite finie lorsque x tend

vers a par valeurs supérieures. Dans ce cas, on notera

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \int_x^b f(t) dt.$$

3. Si l'intégrale est impropre en a et en b , on choisit $c \in]a, b[$, et l'on dit que l'intégrale est *convergente* si les deux intégrales $\int_a^c f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$ (qui possèdent chacune une seule singularité) sont convergentes. Dans ce cas, on notera

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

Une intégrale impropre non convergente est dite *divergente*. La *nature* d'une intégrale est son caractère convergent ou divergent.

Remarque 1.1.5.

Dans le troisième cas, on peut montrer (d'après la relation de Chasles) que le résultat ne dépend pas du choix de c . On pourra alors parler d'intégrale « convergente en b » si l'intégrale $\int_c^b f(t) dt$ converge, d'intégrale « convergente en a » si l'intégrale $\int_a^c f(t) dt$ converge, et d'intégrale « convergente en a et en b » lorsque ces deux intégrales convergent.

Exercice 1.1.6.

Donner la nature (et, le cas échéant, la valeur) des intégrales impropres de l'exercice 1.1.3.

L'intégrale généralisée vérifie les propriétés habituelles de l'intégrale.

Proposition 1.1.7 (positivité).

Si f est positive sur $]a, b[$ et si $\int_a^b f(t) dt$ converge, alors

$$0 \leq \int_a^b f(t) dt.$$

Démonstration.

Immédiat en revenant à la définition, puis par passage à la limite dans les inégalités. $\square$

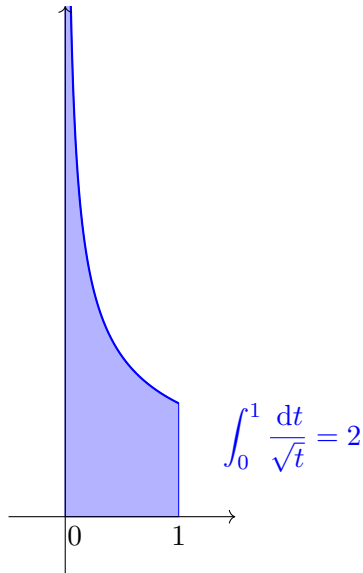


FIGURE 1 – Exemple d'intégrale généralisée, une singularité.

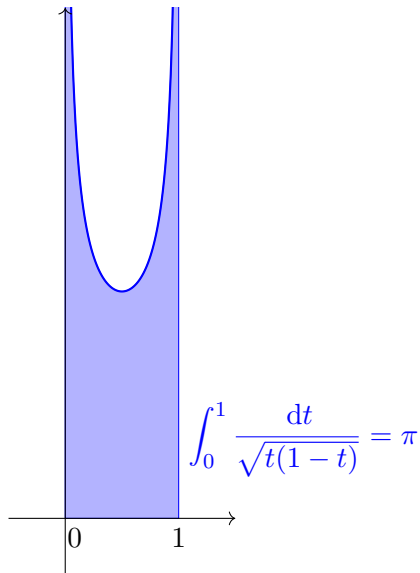


FIGURE 2 – Exemple d'intégrale généralisée, deux singularités.

Proposition 1.1.8 (linéarité).

Si $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ convergent, alors pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\int_a^b \lambda f(t) + \mu g(t) dt$ converge et

$$\int_a^b \lambda f(t) + \mu g(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt.$$

Démonstration.

Immédiat en revenant à la définition, puis par passage à la limite. $\square$

Exercice 1.1.9 (règle CV+DIV=DIV).

Soit $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\int_a^b f(t) dt$ converge et $\int_a^b g(t) dt$ diverge.

Montrer que $\int_a^b f(t) + g(t) dt$ diverge.

Proposition 1.1.10 (croissance).

Si $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ convergent, et si pour tout $t \in]a, b[$ on a $f(t) \leq g(t)$, alors

$$\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt.$$

Démonstration.

Il suffit d'appliquer la positivité de l'intégrale à $g - f$, puis de conclure par linéarité. $\square$

1.2 Exemples et situations de référence**Rappel 1.2.1.**

Nous avons déjà vu que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 0$, et que, le cas échéant,

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}.$$

Nous avons aussi vu que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Nous ajoutons à cette liste deux nouveaux exemples de référence.

Proposition 1.2.2 (exemple de référence).

L'intégrale $\int_0^1 \ln(t) dt$ converge et

$$\int_0^1 \ln(t) dt = -1.$$

Démonstration.

La fonction $\ln$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, cette intégrale a donc une seule singularité en 0. On a alors pour tout $x > 0$:

$$\int_x^1 \ln(t) dt = [t \ln(t) - t]_{t=x}^1 = -1 + x - x \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1.$$

 $\square$ **Théorème 1.2.3** (exemple de Riemann).

L'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Démonstration.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $]0, 1]$, cette intégrale a donc une seule singularité en 0.

Soit $x \in]0, 1]$, on a dans le cas $\alpha \neq 1$:

$$\int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} (1 - x^{1-\alpha}).$$

Cette dernière quantité admet une limite finie en 0 si et seulement si $1 - \alpha > 0$, i.e. $\alpha < 1$.

Si $\alpha = 1$, on a

$$\int_x^1 \frac{dt}{t} = -\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty.$$

□

Exercice 1.2.4.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Quelle est la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$?

Dans la suite de cette partie, on étudiera uniquement le cas des intégrales $\int_a^b f(t) dt$ avec une seule singularité en b , mais tous les théorèmes se généralisent de manière évidente au cas où la singularité est en a (et, par découpage, au cas de double singularité).

Proposition 1.2.5 (intégrale faussement impropre).

Soit $\int_a^b f(t) dt$ une intégrale admettant une seule singularité, en b . On suppose que $b \neq +\infty$ et que la fonction f admet une limite finie en b .

Alors l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est convergente (on dira qu'elle est *faussement impropre*).

Démonstration.

La fonction f est continue sur $[a, b[$ et possède une limite finie en b , on peut donc la prolonger en une fonction g continue sur $[a, b]$, qui possède une primitive G sur $[a, b]$, qui est continue sur $[a, b]$. Alors, pour tout $x \in [a, b]$,

$$\begin{aligned} \int_a^x f(t) dt &= \int_a^x g(t) dt \\ &= G(x) - G(a) \\ &\xrightarrow{x \rightarrow b} G(b) - G(a) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

L'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est donc convergente. □

Exemple 1.2.6.

Étudier la nature de l'intégrale $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{t} dt$.

1.3 Changement de variables

Un outil central pour l'étude de la nature et le calcul d'une intégrale généralisée est la méthode du changement de variable. Même si le principe du calcul

reste le même que pour les intégrales d'une fonction continue sur un segment, la portée de ce résultat s'étend à la nature de l'intégrale, et fait apparaître une hypothèse supplémentaire.

Théorème 1.3.1 (Théorème de changement de variable).

Soit $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ continue, soit $\varphi:]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$, de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante, vérifiant $\varphi(u) \xrightarrow[u > \alpha]{u \rightarrow \alpha} a$ et $\varphi(u) \xrightarrow[u < \beta]{u \rightarrow \beta} b$.

Alors, les intégrales

$$\int_a^b f(t) dt \quad \text{et} \quad \int_\alpha^\beta f(\varphi(u)) \varphi'(u) du$$

sont de même nature. Si elles convergent, on a alors

$$\int_a^b f(t) dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u)) \varphi'(u) du.$$

On dit que l'on a posé $t = \varphi(u)$.

Remarque 1.3.2.

Le théorème reste vrai pour une fonction φ strictement décroissante, à condition de replacer les bornes dans le bon sens. En revanche, il cesse d'être vrai en général si la fonction φ n'est pas strictement monotone.

Dans tous les cas, on dressera le tableau de variations de φ . Une flèche simple signifiera que l'on peut appliquer le théorème de changement de variables sur l'intervalle considéré.

Exercice 1.3.3.

Prouver la convergence et calculer la valeur de

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} dt.$$

On pourra poser le changement de variable $u = \sqrt{t}$.

Exercice 1.3.4.

On sait que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$ converge et vaut $\ln(2)$.

En posant $x = e^t$, déterminer la nature et la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t + 1}$.

Exercice 1.3.5.

En supposant connue la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$, retrouver la nature de l'intégrale $\int_0^1 \frac{du}{u^\alpha}$.

On pourra poser $t = \frac{1}{u}$ ou $u = \frac{1}{t}$.

Exercice 1.3.6.

En supposant connue la nature et la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx$, retrouver la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$. On pourra procéder au changement de variable $t = e^x$.

Exercice 1.3.7.

Quelle est la nature de $\int_0^1 \ln(1-t) dt$?

Remarque 1.3.8.

Les changements de variable permettent de se ramener systématiquement à l'étude des singularités 0 et $+\infty$.

Exemple 1.3.9.

En posant $u = -x$, les intégrales $\int_{-\infty}^0 -xe^x dx$ et $\int_0^{+\infty} ue^{-u} du$ ont la même nature (on sait que la deuxième converge).

Exemple 1.3.10.

En posant $t = 1 + h$, les intégrales $\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t-1}}$ et $\int_0^1 \frac{dh}{\sqrt{h}}$ ont la même nature (on sait que la deuxième converge).

2 Intégrale généralisée d'une fonction positive

Dans la suite de cette partie, on étudiera uniquement le cas des intégrales $\int_a^b f(t) dt$ avec une seule singularité en b , mais tous les théorèmes se généralisent de manière évidente au cas où la singularité est en a (et, par découpage, au cas de double singularité).

Dans cette partie, on se restreint au cas où la fonction f est positive, *i.e.* pour tout $x \in [a, b[$, $f(x) \geq 0$.

Lemme 2.0.1.

Si f est positive, alors la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est croissante.

Démonstration.

Déjà fait. $\square$

Proposition 2.0.2.

Supposons que f soit positive. Alors, $\int_a^b f(t) dt$ converge (en b) si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est majorée sur $[a, b[$.

Démonstration.

Cela découle immédiatement du théorème de limite monotone. $\square$

Théorème 2.0.3 (comparaison).

Soit $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues et positives. On suppose que, pour tout $t \in [a, b]$, $0 \leq f(t) \leq g(t)$.

- ▷ Si $\int_a^b g(t) dt$ converge (en b), alors $\int_a^b f(t) dt$ converge aussi (en b).
- ▷ Si $\int_a^b f(t) dt$ diverge (en b), alors $\int_a^b g(t) dt$ diverge aussi (en b).

Démonstration.

Il suffit de voir que par croissance de l'intégrale et pour tout $x \in [a, b]$,

$$\int_a^x f(t) dt \leq \int_a^x g(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt.$$

On conclut par la proposition 2.0.2. $\square$

Exercice 2.0.4.

Étudier la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} \sin^2 t dt$.

Exercice 2.0.5.

Étudier la nature de l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t} dt$.

Exercice 2.0.6.

Étudier la nature de l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t \cos(t)} dt$.

Corollaire 2.0.7 (HP, mais utilisable).

Soit $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues et positives. On suppose que $f(t) \underset{t \rightarrow b}{=} o(g(t))$.

- ▷ Si $\int_a^b g(t) dt$ est convergente (en b), alors $\int_a^b f(t) dt$ est convergente (en b).
- ▷ Si $\int_a^b f(t) dt$ est divergente (en b), alors $\int_a^b g(t) dt$ est divergente (en b).

Exercice 2.0.8.

Étudier la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Exercice 2.0.9.

Déterminer la nature de $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt[4]{t}} dt$.

Corollaire 2.0.10 (HP, mais utilisable).

Soit f, g deux fonctions continues et positives sur $[a, b]$. On suppose que $f(t) \underset{t \rightarrow b}{\sim} g(t)$. Alors les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ sont de même nature (en b).

Exercice 2.0.11.

Étudier la nature de l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t\sqrt{t}} dt$.

Exercice 2.0.12.

Étudier la nature de l'intégrale $\int_0^1 \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt$.

Exercice 2.0.13.

Étudier la nature de l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{\sqrt{t}} dt$.

3 Fonctions intégrables

3.1 Définitions

Définition 3.1.1.

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ continue. On dit que $\int_a^b f(t) dt$ converge absolument si l'intégrale impropre $\int_a^b |f(t)| dt$ converge.

Lorsque $\int_a^b |f(t)| dt$ converge, on dit aussi que f est *intégrable* sur $I =]a, b[$. On pourra alors noter

$$\int_I f(t) dt = \int_a^b f(t) dt.$$

Remarque 3.1.2.

La convergence absolue de l'intégrale de f signifie donc la convergence de l'intégrale de $|f|$.

Remarque 3.1.3.

Comme précédemment, on pourra parler d'intégrale absolument convergente en a , en b , ou en les deux bornes.

Théorème 3.1.4 (CV absolue $\Rightarrow$ CV et inégalité triangulaire).

Si f est intégrable sur $]a, b[$, alors l'intégrale impropre $\int_a^b f(t) dt$ est convergente. De plus,

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

Démonstration.

Admis □

Exercice 3.1.5.

Étudier la nature des intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{(1+t^2)\sqrt{t}} dt$ et $\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$.

Remarque 3.1.6.

La réciproque n'est pas vraie : une fonction peut avoir une intégrale impropre qui converge, sans être intégrable pour autant !

Exercice 3.1.7.

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente, mais que la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Proposition 3.1.8 (linéarité).

Une combinaison linéaire de fonctions intégrables est intégrable. Autrement dit, si f et g sont deux fonctions intégrables sur $]a, b[$ et si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f + \mu g$ est intégrable sur $]a, b[$ et l'on sait aussi que

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt.$$

3.2 Critères de comparaison

Dans cette partie, on considère $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continues. On suppose donc que les intégrales impropres étudiées n'ont qu'une singularité, en la borne supérieure.

Les résultats énoncés s'étendent bien entendu au cas où il n'y a qu'une singularité, en la borne inférieure.

Si les deux bornes sont des singularités, on revient à la définition : on coupe l'intégrale en deux, et on étudie les deux intégrales de la forme $\int_a^c f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$.

Théorème 3.2.1 (comparaison à une fonction intégrable).

Supposons que pour tout $t \in]a, b[$, $|f(t)| \leq |g(t)|$.

Alors, si g est intégrable en b , f l'est aussi.

Notamment, si $\int_a^b g(t) dt$ converge absolument, alors l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge aussi absolument, donc converge.

Exercice 3.2.2.

Montrer que $\int_1^{+\infty} \cos(t) \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$ converge.

Exercice 3.2.3.

Déterminer la nature de l'intégrale $\int_0^1 \sin(t) \ln(t) dt$.

Corollaire 3.2.4 (très utile).

Supposons que f et g vérifient $f(t) \underset{t \rightarrow b}{\sim} g(t)$.

Alors, f est intégrable en b si et seulement si g l'est aussi. Autrement dit, $\int_a^b |f(t)| dt$ et $\int_a^b |g(t)| dt$ ont la même nature.

Notamment, si $\int_a^b g(t) dt$ converge absolument, alors l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge aussi absolument, donc converge.

Exercice 3.2.5.

Déterminer la nature de $\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{\cos(t)}{t^2}\right) dt$.

Exercice 3.2.6.

Déterminer la nature de l'intégrale $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) dt$.

Exercice 3.2.7.

Déterminer la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t\sqrt{t}} dt$.

Corollaire 3.2.8 (très utile).

Supposons que f et g vérifient $f(t) \underset{t \rightarrow b}{=} o(g(t))$.

Alors, si g est intégrable en b , f l'est aussi.

Notamment, si $\int_a^b g(t) dt$ converge absolument, alors l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge aussi absolument, donc converge.

Exercice 3.2.9.

Déterminer la nature de l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} dt$.

Corollaire 3.2.10 (moins utile).

Supposons que f et g vérifient $f(t) \underset{t \rightarrow b}{=} O(g(t))$.

Alors, si g est intégrable en b , f l'est aussi.

Notamment, si $\int_a^b g(t) dt$ converge absolument, alors l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge aussi absolument, donc converge.

4 Schéma d'étude

Lorsque l'on étudie la convergence de $\int_a^b f(t) dt$, on respectera bien les étapes suivantes.

1. Vérifier que f est continue sur $]a, b[$ (la plupart du temps, on écrit « f est continue sur [...] par opérations sur les fonctions continues »), et déterminer les singularités de f (on se pose la question « est-ce que f est définie en a ? en b ? continue ?).

2. S'il y a deux singularités (une en chaque borne), on coupe l'intervalle d'étude en deux.

Dans ce qui suit, on suppose qu'il n'y a qu'une singularité, en b .

3. Vérifier si $\int_a^b f(t) dt$ n'est pas faussement impropre : on détermine la limite de f en b , si ce n'est pas trop difficile.
4. Si f est combinaison linéaire de plusieurs fonctions simples, on peut étudier chacune de ces fonctions séparément.
5. On essaie de déterminer un équivalent simple de f .
Supposons que l'on ait obtenu $f(t) \underset{t \rightarrow b}{\sim} g(t)$. On travaille alors sur g , et non sur f . Parfois, on ne peut simplifier f : on travaille avec $g = f$!
6. Si g n'est pas positive, on étudie la convergence absolue de l'intégrale, c'est-à-dire que l'on s'intéresse à $\int_a^b |g(t)| dt$ (et l'on peut poursuivre directement au point suivant, en considérant $|g(t)|$ à la place de $g(t)$).
7. Si g est positive, on essaie de comparer g à une fonction simple/de référence. Voici les principales idées.

- a) Faire apparaître un exemple de Riemann dans g .
- b) Multiplier par un terme de la forme de t^α ($\alpha > 1$ si $b = +\infty$; $\alpha < 1$ si $b = 0$) et utiliser les croissances comparées pour obtenir $t^\alpha g(t) \xrightarrow{t \rightarrow b} 0$, et donc $g(t) = o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$. C'est souvent le cas avec des termes de la forme « puissance $\times$ exponentielle ».
- c) Utiliser une majoration (souvent amenée par l'énoncé ou les questions précédentes). Penser à utiliser les majorations $|\cos(t)| \leq 1$ et $|\sin(t)| \leq 1$.

8. Conclure en utilisant un argument de comparaison à une fonction intégrable, puis éventuellement en disant « une intégrale qui converge absolument est convergente ».

9. Éventuellement, effectuer un changement de variable pour revenir à une intégrale connue (souvent suggéré par l'énoncé).
10. Si rien de cela ne fonctionne, on peut essayer *en dernier recours* de calculer directement $\int_a^x f(t) dt$ (où x est fixé), éventuellement par intégration par parties, puis de passer à la limite

Pour les fractions rationnelles (quotients de polynômes), il existe des techniques qui permettent de les décomposer en fractions plus simples et qui sont

hors programme. On retrouve toutefois souvent les décompositions suivantes :

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$$

$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{1}{2(t-1)} - \frac{1}{2(t+1)}$$

Exercice 4.0.1.

Justifier la convergence de $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^2-1}$, puis donner sa valeur.