

XVI Fonctions de plusieurs variables

Dans tout ce chapitre, n est un entier naturel non nul (pour les exemples et applications, on considérera surtout $n = 2$ et $n = 3$). L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

1 Éléments de topologie de $\mathbb{R}^n$

Dans toute cette partie, A est une partie de $\mathbb{R}^n$, et a est un point de $\mathbb{R}^n$.

Rappel 1.0.1.

Soit $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Le produit scalaire et la norme usuelle sont définis par

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n,$$

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

La distance entre x et y est alors définie par

$$\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Remarque 1.0.2.

La notation $\bar{A}$ sera réservée à la notion d'adhérence, on notera le complémentaire d'une partie A de la manière suivante :

$$\mathbb{R}^n \setminus A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \notin A\}.$$

Définition 1.0.3 (voir figure 1).

Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{R}_+$. On appelle :

- ▷ *boule ouverte* de centre a et de rayon r l'ensemble $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < r\}$;
- ▷ *boule fermée* de centre a et de rayon r l'ensemble $\bar{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \leq r\}$.

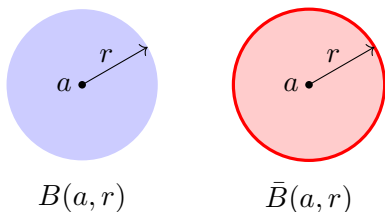


FIGURE 1 – Exemples de boules ouvertes et fermées.

Remarque 1.0.4.

La boule fermée $\bar{B}(a, r)$ est donc la réunion de la boule ouverte $B(a, r)$ et de la sphère de centre a et de rayon r :

$$S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| = r\}.$$

Dans $\mathbb{R}^2$, cette sphère est un cercle, et les boules sont des disques (ouverts ou fermés).

Remarque 1.0.5 (cas du rayon nul).

On a $B(a, 0) = \emptyset$ et $\bar{B}(a, 0) = \{a\}$.

Définition 1.0.6.

Une partie $A \subset \mathbb{R}^n$ est dite *bornée* s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $a \in A$, $\|a\| \leq M$; autrement dit, tel que $A \subset \bar{B}(0, M)$.

Exemple 1.0.7 (voir figures 2 et 3).

Dans $\mathbb{R}^2$, un rectangle de sommets a, b, c, d est une partie bornée du plan. Le quart de plan

$$\mathcal{Q} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\}$$

n'est pas une partie bornée du plan

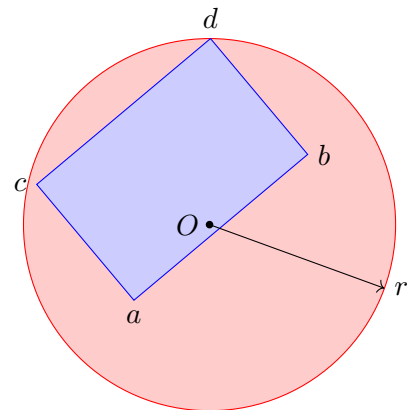


FIGURE 2 – Un rectangle est borné : ici, $r = \max(\|a\|, \|b\|, \|c\|, \|d\|)$.

Définition 1.0.8 (partie ouverte).

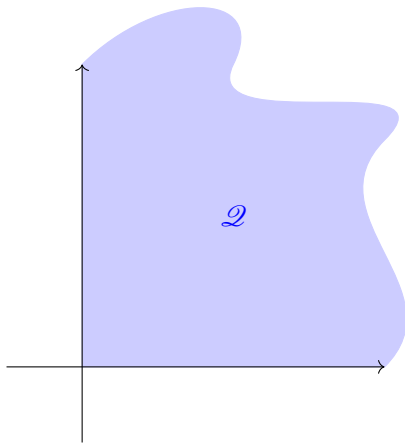
Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est *ouverte* si, pour tout $a \in A$, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$.

Exemple 1.0.9.

Dans $\mathbb{R}$, les intervalles ouverts sont bien entendu des ouverts. Dans $\mathbb{R}^n$, une boule ouverte est un ouvert.

Exemple 1.0.10 (voir figure 4).

Un produit d'intervalles ouverts est un ouvert. Dans $\mathbb{R}^2$, si $a < b$ et $c < d$, alors le rectangle $]a, b[\times]c, d[$ est un ouvert. De même, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ est ouvert.

FIGURE 3 – Le quart de plan $\mathcal{Q}$ n'est pas borné.**Définition 1.0.11** (partie fermée).

Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est *fermée* si son complémentaire $\mathbb{R}^n \setminus A$ est ouvert.

Exemple 1.0.12.

Dans $\mathbb{R}$, les intervalles fermés sont bien entendu des fermés. Dans $\mathbb{R}^n$, une boule fermée est un fermé.

Exemple 1.0.13 (voir figure 4).

Un produit d'intervalles fermés est un fermé.

Dans $\mathbb{R}^2$, si $a < b$ et $c < d$, alors le rectangle $[a, b] \times [c, d]$ est un fermé.

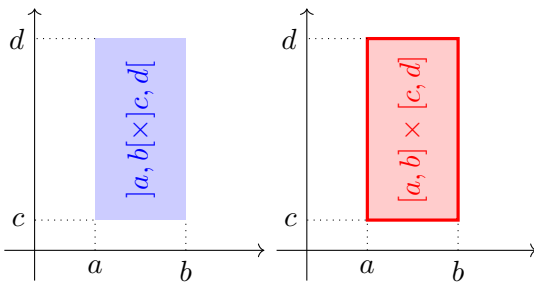


FIGURE 4 – Produits d'intervalles ouverts et fermés

Remarque 1.0.14 (⚠).

Ouvert n'est pas le contraire de fermé.

Certaines parties sont à la fois ouvertes et fermées : $\mathbb{R}^n$ et $\emptyset$.

Certaines parties ne sont ni ouvertes, ni fermées : $]0, 1]$, dans $\mathbb{R}$, par exemple.

Définition 1.0.15.

Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}^n$.

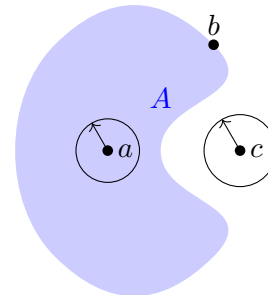
1. Le point a est à l'intérieur de A (ou est *intérieur* à A) s'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$.
2. Le point a est à l'extérieur de A (ou est *extérieur* à A) s'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset \mathbb{R}^n \setminus A$.
3. Le point a est *adhérent* à A (ou *adhère* à A) si pour tout $r > 0$, $B(a, r) \cap A \neq \emptyset$.

Remarque 1.0.16 (voir figure 5).

Un point a est intérieur à A s'il y a « au moins un petit peu de A tout autour de lui ». La plupart du temps, cela signifie que a est dans A , mais pas « au bord de A » (nous détaillerons cela dans la suite).

Un point a est extérieur à A s'il est à l'intérieur de $\bar{A}$. Cela signifie qu'il est « loin de A », au sens où l'on peut placer une boule centrée en a et qui ne touche pas A .

Un point a adhère à A s'il appartient à A , ou bien s'il « touche A » (cf. *infra*). En effet, a adhère à A si et seulement si pour tout $r > 0$, il existe $x \in A$ vérifiant $\|a - x\| < r$. Cela signifie que l'on peut approcher a par des éléments de A , quelle que soit la précision demandée.

FIGURE 5 – Le point a est intérieur à A (et adhère à A), b adhère à A sans nécessairement appartenir à A , c est extérieur à A .**Définition 1.0.17** (intérieur).

L'intérieur d'une partie A de $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des points intérieurs à A . On le note $\mathring{A}$.

Formellement :

$$\mathring{A} = \{ a \in \mathbb{R}^n \mid \exists r > 0, B(a, r) \subset A \}.$$

Remarque 1.0.18.

La phrase « a est intérieur à A » peut donc s'écrire « $a \in \mathring{A}$ ».

De plus, A est un ouvert si et seulement si $A = \mathring{A}$.

On peut montrer que $\mathring{A}$ est un ouvert. C'est même le plus grand ouvert inclus dans A .

Exemple 1.0.19 (intervalles de $\mathbb{R}$, $n = 1$).

Si $A = (a, b)$ (où (et) valent pour] ou [), alors $\mathring{A} =]a, b[$.

Exemple 1.0.20 (boules).

Si A est une boule (ouverte ou fermée, peu importe) de centre $a \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $r \geq 0$, alors

$$\mathring{A} = B(a, r).$$

Définition 1.0.21 (adhérence).

L'adhérence d'une partie A de $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des points qui adhèrent à A . On la note $\bar{A}$.

Formellement :

$$\bar{A} = \{ a \in \mathbb{R}^n \mid \forall r > 0, B(a, r) \cap A \neq \emptyset \}.$$

Remarque 1.0.22.

La phrase « a adhère à A » peut donc s'écrire $a \in \bar{A}$.

De plus, A est un fermé si et seulement si $A = \bar{A}$.

On peut montrer que $\bar{A}$ est un fermé. C'est même le plus petit fermé contenant A .

Exemple 1.0.23 (intervalles de $\mathbb{R}$, $n = 1$).

Si $a < b$ sont des réels, et si $A = (a, b)$ (où (et) valent pour] ou [), alors $\mathring{A} =]a, b[$.

Exemple 1.0.24 (boules).

Si A est une boule (ouverte ou fermée, peu importe) de centre $a \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $r \geq 0$, alors

$$\bar{A} = \bar{B}(a, r).$$

Définition 1.0.25 (frontière/bord).

Le *bord* (ou *frontière*) d'une partie A de $\mathbb{R}^n$ est (les deux définitions sont équivalentes)

- ▷ l'ensemble des points qui ne sont ni à l'intérieur de A , ni à l'extérieur de A ;
- ▷ l'ensemble des points qui adhèrent à A , mais ne sont pas à l'intérieur de A .

On le note ∂A . Plus formellement :

$$\partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A}.$$

Exemple 1.0.26 (intervalles de $\mathbb{R}$, $n = 1$).

Si $a < b$ sont des réels, et si $A = (a, b)$ (où (et) valent pour] ou [), alors $\partial A = \{a, b\}$.

Exemple 1.0.27 (boules et sphères).

Si A est une boule (ouverte ou fermée, peu importe) de centre $a \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $r \geq 0$, alors ∂A est la sphère de centre a et de rayon r (dans le plan, on parle plutôt de cercle).

Remarque 1.0.28.

On a toujours

$$\mathring{A} \subset A \subset \bar{A}$$

et

$$\partial A \subset \bar{A},$$

ainsi que

$$\bar{A} = \mathring{A} \cup \partial A.$$

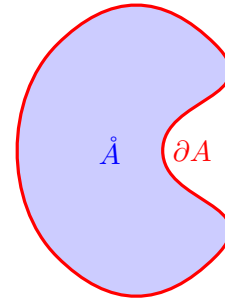


FIGURE 6 – Intérieur et bord d'une partie.

On utilisera surtout la proposition suivante pour déterminer le caractère ouvert ou fermé d'une partie.

Proposition 1.0.29 (pratique, légèrement HP).

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$.

1. A est ouvert si et seulement si $A \cap \partial A = \emptyset$.
2. A est fermé si et seulement si $\partial A \subset A$.
3. $\mathring{A} = A \setminus \partial A$.
4. $\bar{A} = A \cup \partial A$.

Démonstration.

Admis. □

Pour étudier une partie $A \subset \mathbb{R}^n$, on suit les étapes suivantes.

1. On commence par représenter graphiquement A .
2. On détermine graphiquement $\mathring{A}$ et ∂A .
3. On donne les écritures formelles de $\mathring{A}$ et de ∂A (souvent, ∂A est constitué de plusieurs « courbes » simples, dont on donnera les équations ou représentations).
4. On conclut au caractère ouvert, fermé ou borné de A .

Exercice 1.0.30.

Représenter la partie

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \leq 0 \text{ et } x^2 + y^2 \leq 1 \}.$$

Déterminer son bord et son intérieur.

2 Fonctions de plusieurs variables

Dans cette partie, on considère une fonction $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, où A est une partie non vide de $\mathbb{R}^n$.

Si $x = (x_1, \dots, x_n)$, on note $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$. Une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}^n$ est donc tout simplement une fonction de n variables.

Exemple 2.0.1.

La fonction $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de deux variables.

$$(x, t) \mapsto t \ln(x)$$

La fonction $N : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de trois variables.

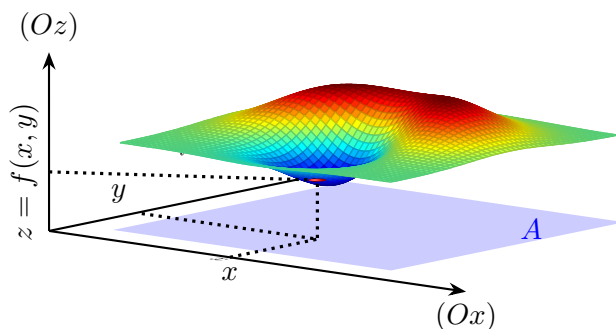
$$(x, y, z) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$


FIGURE 8 – Représentation d'une fonction de deux variables.

2.1 Représentation (cas $n = 2$)

Dans le cas d'une fonction de deux variables $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, le graphe de f est

$$\Gamma(f) = \{ (x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in A \}.$$

On le représente dans $\mathbb{R}^3$, muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ comme une « nappe » (voir figures 7, 8 et 9), constituée des points $M(x, y, z)$, où :

- ▷ $(x, y) \in A$: on identifie donc $\mathbb{R}^2$ au plan (Oxy) ;
- ▷ $z = f(x, y)$ est l'altitude du point courant.

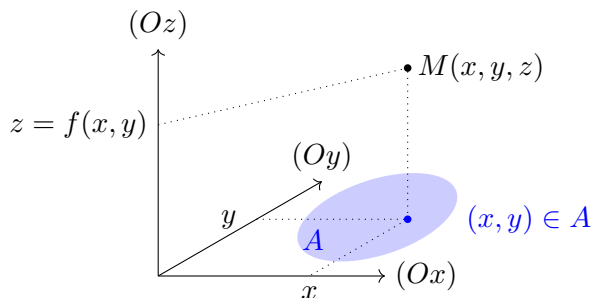


FIGURE 7 – Représentation d'une fonction $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, où $A \subset \mathbb{R}^2$

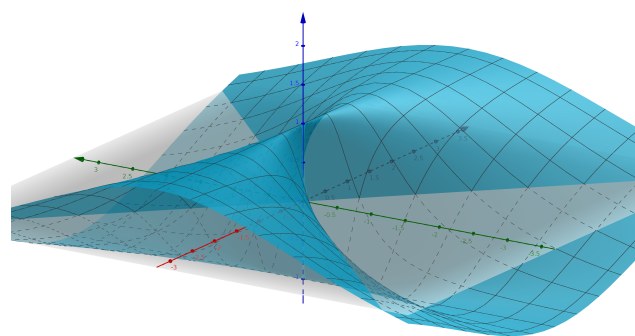


FIGURE 9 – Représentation de la fonction $(x, y) \mapsto \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

On dit que f tend vers ℓ en a , ce que l'on note $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$, lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall x \in A, \\ \|x - a\| \leq r \Rightarrow \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon.$$

Remarque 2.2.2.

Cela a le même sens que dans le cas d'une fonction réelle : lorsque l'on rapproche x de a , alors $f(x)$ se rapproche de ℓ , d'autant plus près que l'on veut.

Exercice 2.2.3.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$.

Calculer $f(x, x)$ et $f(x, -x)$. À votre avis, la fonction f admet-elle une limite en 0 ?

Exercice 2.2.4.

Sur le même modèle que l'exercice précédent, pensez-vous que la fonction de la figure 9 admette une limite finie en $(0, 0)$?

Définition 2.2.1 (limite finie).

Soit $\ell \in \mathbb{R}$, on suppose ici que a adhère à A .

Définition 2.2.5.

Soit $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, on suppose ici que a adhère à A .

On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a , ce que l'on note $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$, lorsque

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} 0.$$

Définition 2.2.6 (limite infinie).

On suppose ici que a adhère à A .

On dit que f tend vers $+\infty$ en a , ce que l'on note $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} +\infty$, lorsque

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists r > 0, \forall x \in A, \\ \|x - a\| \leq r \Rightarrow f(x) \geq M.$$

On dit que f tend vers $-\infty$ en a , ce que l'on note $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} -\infty$, lorsque

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists r > 0, \forall x \in A, \\ \|x - a\| \leq r \Rightarrow f(x) \leq M.$$

Remarque 2.2.7.

Cela a le même sens que dans le cas d'une fonction réelle : lorsque l'on rapproche x de a , alors $f(x)$ devient arbitrairement grand (resp. petit), d'autant que l'on veut.

Définition 2.2.8 (continuité).

On suppose ici que $a \in A$.

On dit que f est continue en a si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} f(a)$.

On dit que f est continue sur A si f est continue en tout $a \in A$.

On ne vous demandera pas de démontrer la continuité d'une fonction. L'argument pour assurer la continuité d'une fonction sera, comme d'habitude, celui « d'opérations sur les fonctions continues ».

Théorème 2.2.9 (opérations simples).

Soit $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur A , soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{R}$. Alors, les fonctions suivantes sont continues : $\lambda f + \mu g$, fg , f^n , $\frac{f}{g}$ (dans le cas où g ne s'annule pas sur A).

Lemme 2.2.10.

Les applications « coordonnées », *i.e.* de la forme $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$, sont continues sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration.

Admis □

Exemple 2.2.11.

La fonction $(x, y) \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition 2.2.12.

Toute fonction polynomiale (de n variables) est continue sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration.

Il suffit de multiplier des fonctions coordonnées, qui sont continues, et d'en faire des combinaisons linéaires. □

Exemple 2.2.13.

L'application $(x, y) \mapsto x^2y + 2xy + 3y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Théorème 2.2.14 (argument de composition).

Soit $f_1, \dots, f_p$ des fonctions définies et continues sur A , à valeurs dans des intervalles $I_1, \dots, I_p$ vérifiant $I_1 \times \dots \times I_p \subset B$, où B est une partie de $\mathbb{R}^p$. Soit $h : B \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Alors, l'application définie sur A par

$$x \mapsto h(f_1(x), \dots, f_p(x))$$

est continue sur A .

Démonstration.

Admis □

Remarque 2.2.15.

Un cas très utile est le cas $p = 1$. Par exemple, si $n = 2$, si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, et si $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur l'image de f , alors

$$(x, y) \mapsto \varphi(f(x, y))$$

est aussi continue sur A .

Exemple 2.2.16.

La fonction f définie par $f(x, y) = \frac{\cos(x) + \sin(xy)}{x^2 + e^y}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, par composition de fonctions continues.

3 Dérivées partielles

Dans toute cette partie, A désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a = (a_1, \dots, a_n)$ est un point de A et f est une fonction définie sur A .

On sait qu'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$. On montre aisément (il suffit d'utiliser le théorème de Pythagore) qu'il existe des intervalles ouverts $I_1, \dots, I_n$ tels que :

$$\triangleright a \in I_1 \times \dots \times I_n ;$$

$$\triangleright I_1 \times \dots \times I_n \subset A.$$

Concrètement, cela signifie qu'à partir de a , on peut modifier légèrement une coordonnée de a , tout en restant dans A .

3.1 Dérivées partielles d'ordre 1

Définition 3.1.1 (fonction partielle).

Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Si $1 \leq i \leq n$, on appelle i^{e} fonction partielle de f en a la fonction

$$f_{i,a} : t \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

Remarque 3.1.2.

Cette fonction est obtenue en fixant toutes les variables de f , sauf la i^{e} . On sait qu'elle est au moins définie sur un intervalle ouvert contenant a_i .

On note parfois cette fonction

$$f(a_1, \dots, a_{i-1}, \cdot, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

Exemple 3.1.3.

On a représenté dans les figures 10 et 11 deux fonctions partielles de la fonction $f : (x, y) \mapsto (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$.

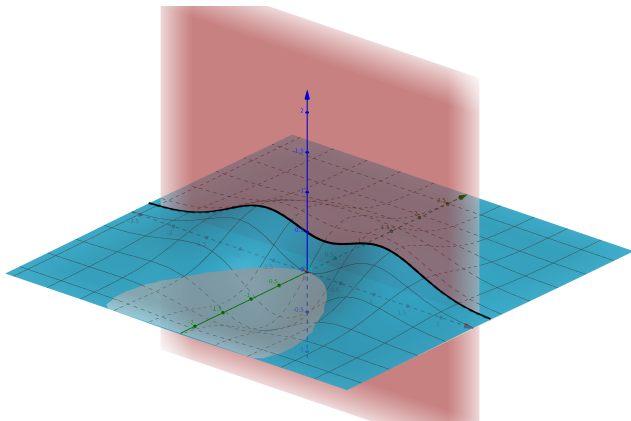


FIGURE 10 – Exemple de fonction partielle (y est fixé)

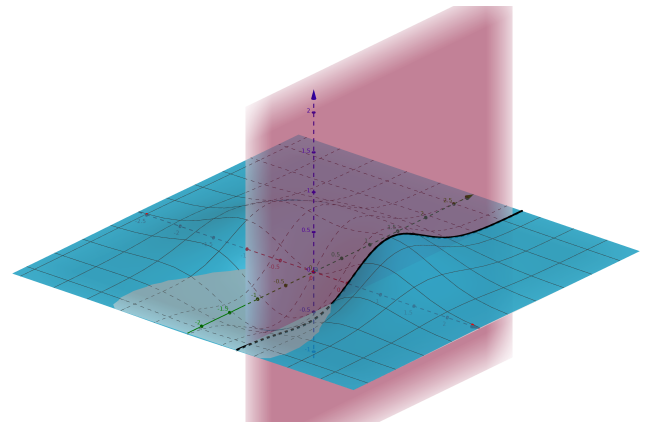


FIGURE 11 – Exemple de fonction partielle (x est fixé)

Définition 3.1.4.

Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Si $1 \leq i \leq n$, on dit que f admet une *dérivée partielle* par rapport à la i^{e} variable au point a si la fonction partielle $f_{i,a} = f(a_1, \dots, a_{i-1}, \cdot, a_{i+1}, \dots, a_n)$ est dérivable en a_i .

On note alors sa dérivée :

$$f'_{i,a}(a_i) = \partial_i f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_i).$$

Remarque 3.1.5.

On a donc

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a)}{t}.$$

En pratique, pour calculer cette dérivée partielle, on considère toutes les variables comme des constantes, excepté celle selon laquelle on dérive la fonction.

Exemple 3.1.6.

Avec $f : (x, y) \mapsto x^3y^2 + 3xy + 2x$, on a pour $a = (x, y)$:

$$\partial_1 f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a) = 3x^2y^2 + 3y + 2,$$

$$\partial_2 f(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 2x^3y + 3x.$$

Exercice 3.1.7.

Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes.

$$1. f : (x, y) \mapsto \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$2. g : (x, y, z) \mapsto \sin(x^2 + 3z) + \frac{y}{1 + z^2}$$

$$3. h : (\rho, \theta) \mapsto \rho \cos(\theta)$$

Remarque 3.1.8.

Les symboles ∂_i et ∂x_i signifient que l'on dérive par rapport à la i^{e} variable, les variables étant censées s'appeler $x_1, \dots, x_n$.

En pratique, ces variables sont plutôt notées $x, y, z, t, \dots$. On n'hésitera pas à utiliser les symboles $\frac{\partial}{\partial x}$ (pour dériver partiellement une expression) et $\frac{\partial f}{\partial x}$ (pour signifier une dérivation partielle de f par rapport à la variable nommée x), en faisant attention de ne pas se tromper dans l'ordre des variables.

Exemple 3.1.9.

On peut écrire :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(x^3y^2 + 3xy + 2x) &= 3x^2y^2 + 3y + 2, \\ \frac{\partial}{\partial y}(x^3y^2 + 3xy + 2x) &= 2x^3y + 3x.\end{aligned}$$

Remarque 3.1.10.

Une dérivée partielle est fondamentalement... une dérivée. Tous les résultats d'opérations sur les fonctions dérivables sont donc valides dans notre cadre.

Par exemple, si $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ admettent une dérivée partielle par rapport à la i^{e} variable en a , et si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f + \mu g$ et fg admettent des dérivées partielles par rapport à la i^{e} variable en a , et

$$\partial_i(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda \partial_i f(a) + \mu \partial_i g(a)$$

ainsi que

$$\partial_i(fg)(a) = f(a)\partial_i g(a) + g(a)\partial_i f(a).$$

Exercice 3.1.11.

Écrire le résultat précédent avec le symbole $\frac{\partial}{\partial x_i}$.

3.2 Gradient et point critique**Définition 3.2.1.**

Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que f admet des dérivées partielles par rapport à chacune de ses variables au point a .

On appelle *gradient* de f en a le vecteur

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(a) \\ \vdots \\ \partial_n f(a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Exercice 3.2.2.

Reprendre les fonctions de l'exercice 3.1.7, et calculer le gradient de chaque fonction en tout point où cela a un sens.

Exercice 3.2.3.

Déterminer le gradient de la fonction

$$f : (x, y) \mapsto (x^2 + y)e^{-(x^2 + y^2)},$$

représentée dans la figure 12.

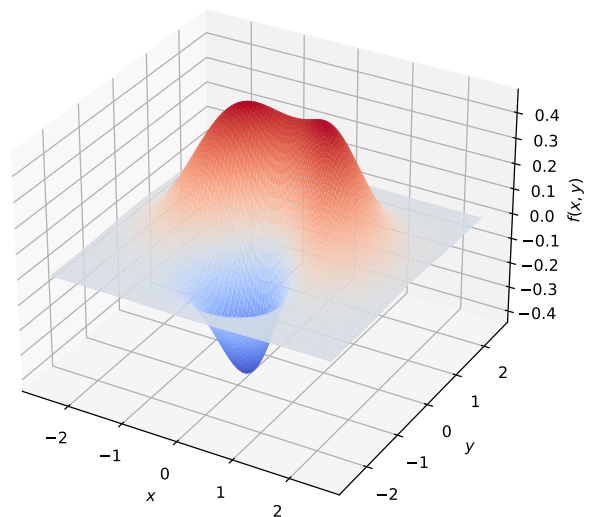


FIGURE 12 – Tracé de $(x, y) \mapsto (x^2 + y)e^{-(x^2 + y^2)}$

Définition 3.2.4.

Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que le gradient de f existe en a .

Alors, a est un *point critique* de f si

$$\nabla f(a) = \vec{0}.$$

C'est équivalent à dire que

$$\partial_1 f(a) = \dots = \partial_n f(a) = 0$$

ou encore que

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0.$$

Exercice 3.2.5.

Déterminer les points critiques de la fonction

$$\varphi : (x, y) \mapsto x^3 - 3x + y^2.$$

Exercice 3.2.6.

Déterminer les points critiques de la fonction

$$f : (x, y) \mapsto (x^2 + y)e^{-(x^2 + y^2)}.$$

3.3 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et développement limité

Définition 3.3.1.

Soit A un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A si f admet des dérivées partielles en tout point de A et si chacune de ses fonctions dérivées partielles est continue sur A .

Exemple 3.3.2.

Les fonctions polynomiales (de n variables) sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$, car toutes leurs dérivées partielles sont elles aussi polynomiales, donc continues.

Sur $\mathbb{R}^2$, $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Sur $\mathbb{R}^3$, $g : (x, y, z) \mapsto x^2 - 2yz$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$.

Remarque 3.3.3.

Les arguments d'opération et de composition s'appliquent pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Théorème 3.3.4 (DL d'ordre 1 d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$).

Soit A un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in A$.

Alors, pour $h = (h_1, \dots, h_n)$ au voisinage de $\vec{0}$,

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + o(\|h\|) \\ &= f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + o(\|h\|). \end{aligned}$$

Démonstration (HP).

On donne une preuve légèrement informelle dans le cas $n = 2$. Pour une preuve parfaitement rigoureuse (dans la gestion de o), on utilisera des outils d'accroissements finis.

On utilise les développements limités à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a) \\ &= f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2 + h_2) \\ &\quad + f(a_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) \\ &= h_1 \partial_1 f(a_1, a_2 + h_2) + o(h_1) \\ &\quad + h_2 \partial_2 f(a_1, a_2) + o(h_2). \end{aligned}$$

On utilise alors la continuité de $\partial_1 f$ pour écrire :

$$\partial_1 f(a_1, a_2 + h_2) = \partial_1 f(a_1, a_2) + o(1),$$

ce qui donne, en observant que $|h_i| \leq \|h\|$, ce qui donne que les $o(h_i)$ sont des $o(\|h\|)$.

$$f(a+h) - f(a) = h_1 \partial_1 f(a_1, a_2) + h_2 \partial_2 f(a_1, a_2) + o(\|h\|).$$

□

Remarque 3.3.5 (voir figure 13).

Ce résultat montre que si v est un vecteur unitaire, alors

$$\frac{f(a+tv) - f(a)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \langle \nabla f(a), v \rangle.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, cette quantité est maximale lorsque v est positivement colinéaire à $\nabla f(a)$ (et minimale lorsque v est négativement colinéaire à $\nabla f(a)$).

Dans le cas $n = 2$, $\nabla f(a)$ est un vecteur indiquant la direction de plus grande pente sur la surface $z = f(x, y)$, en pointant « vers le haut ».

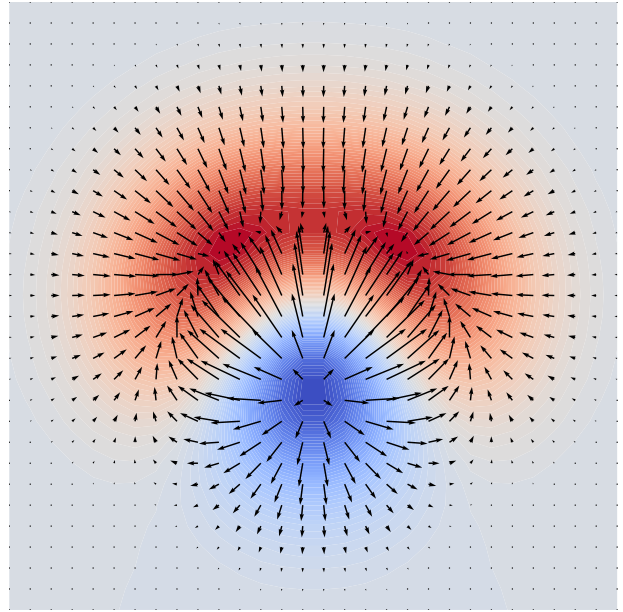


FIGURE 13 – Champ de gradient de $f : (x, y) \mapsto (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$. Les couleurs indiquent l'altitude $z = f(x, y)$.

3.4 Règle de la chaîne

Théorème 3.4.1 (cas $n = 2$).

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I . On suppose que $x(I) \times y(I) \subset A$, et que $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

On note, pour tout $t \in I$,

$$F(t) = f(x(t), y(t)) = f(X(t)),$$

où

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Alors, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et, pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} F'(t) &= x'(t) \partial_1 f(x(t), y(t)) + y'(t) \partial_2 f(x(t), y(t)) \\ &= x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \\ &= x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(X(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(X(t)) \\ &= \langle \nabla f(X(t)), X'(t) \rangle. \end{aligned}$$

Démonstration (HP).

On donne une idée générale de démonstration, pas complètement formelle.

On utilise le développement limité de f :

$$\begin{aligned} F(t+h) - F(t) &= f(X(t+h)) - f(X(t)) \\ &= \langle \nabla f(X(t)), X(t+h) - X(t) \rangle \\ &\quad + o(\|X(t+h) - X(t)\|). \end{aligned}$$

Or, on a aussi le développement limité

$$X(t+h) - X(t) = hX'(t) + o(h),$$

ce qui montre notamment que le terme $o(\|X(t+h) - X(t)\|)$ est un $o(h)$.

On peut alors écrire

$$F(t+h) - F(t) = h\langle \nabla f(X(t)), X'(t) \rangle + h\langle \nabla f(X(t)), o(1) \rangle + o(h)$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'obtenir que le terme $\langle \nabla f(X(t)), o(1) \rangle$ est un $o(1)$.

Ainsi,

$$F(t+h) - F(t) = h\langle \nabla f(X(t)), X'(t) \rangle + o(h).$$

Cela permet de conclure. $\square$

Remarque 3.4.2.

Cette formule s'adapte bien entendu dans le cas $n = 3$: avec

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

et

$$F(t) = f(X(t)) = f(x(t), y(t), z(t)),$$

alors

$$\begin{aligned} F'(t) &= \langle \nabla f(X(t)), X'(t) \rangle \\ &= x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(X(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(X(t)) \\ &\quad + z'(t) \frac{\partial f}{\partial z}(X(t)). \end{aligned}$$

Remarque 3.4.3.

Cette formule généralise la formule de composition de deux fonctions réelles : avec $F = f \circ g$,

$$F'(t) = f'(g(t))g'(t).$$

Exercice 3.4.4.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Écrire les dérivées partielles des fonctions suivantes.

1. $\varphi : t \mapsto f(t^2, t^3 - t)$
2. $\chi : r \mapsto f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ (θ est fixé)
3. $\psi : \theta \mapsto f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ (r est fixé)

Corollaire 3.4.5 (cas $n = 2$).

Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x, y : B \rightarrow \mathbb{R}$, où B est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On suppose que pour tout $b = (u, v) \in B$,

$$X(b) = X(u, v) = (x(u, v), y(u, v)) \in A.$$

On suppose aussi que f, x, y admettent sont de classe $\mathcal{C}^1$.

Alors, en posant

$$F : (u, v) \mapsto f(X(u, v)) = f(x(u, v), y(u, v)),$$

F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur B , et pour tout $b = (u, v) \in B$:

$$\begin{aligned} \partial_1 F(u, v) &= \partial_1 x(u, v) \partial_1 f(X(u, v)) \\ &\quad + \partial_1 y(u, v) \partial_2 f(X(u, v)), \\ \partial_2 F(u, v) &= \partial_2 x(u, v) \partial_1 f(X(u, v)) \\ &\quad + \partial_2 y(u, v) \partial_2 f(X(u, v)), \end{aligned}$$

ou encore, en notant x la première variable de f et y la seconde variable de f ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) &= \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \frac{\partial f}{\partial x}(X(u, v)) \\ &\quad + \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \frac{\partial f}{\partial y}(X(u, v)), \\ \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) &= \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \frac{\partial f}{\partial x}(X(u, v)) \\ &\quad + \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \frac{\partial f}{\partial y}(X(u, v)). \end{aligned}$$

Démonstration.

Il suffit d'appliquer la règle de la chaîne (théorème 3.4.1) aux fonctions partielles de F . $\square$

Remarque 3.4.6.

Les physiciens écriront plutôt quelque chose du type

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \\ \frac{\partial f}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}, \end{aligned}$$

f, x, y, u, v représentant plutôt des grandeurs physiques variant les unes par rapport aux autres.

Exercice 3.4.7.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Écrire les dérivées partielles des fonctions suivantes.

1. $\varphi : (u, v) \mapsto f(u + v, u - v)$
2. $\chi : (s, t) \mapsto f(s^2 + t^2, 2s - t)$
3. $\psi : (r, \theta) \mapsto f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$

Remarque 3.4.8.

La généralisation au cas de fonctions de plus de 2 variables est immédiate (mais pénible à écrire).

Exercice 3.4.9.

Écrire les dérivées partielles des fonctions suivantes.

1. $(u, v) \mapsto h(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$
2. $(u, v, w) \mapsto h(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$

Le cas le plus utile est le suivant. Il est à savoir refaire (voire à connaître par cœur pour le premier).

3.5 Coordonnées polaires

L'application

$$(\rho, \theta) \mapsto (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))$$

réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$: on sait aisément passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires.

Corollaire 3.5.1 (passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires).

Si $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, en notant

$$F(\rho, \theta) = f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)),$$

alors, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[$ et, pour tout $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in]-\pi, \pi[$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \rho}(\rho, \theta) &= \frac{\partial}{\partial \rho}(f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))) \\ &= \cos(\theta) \partial_1 f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \\ &\quad + \sin(\theta) \partial_2 f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \\ &= \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial x}(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \\ &\quad + \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \theta}(\rho, \theta) &= \frac{\partial}{\partial \theta}(f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))) \\ &= -\rho \sin(\theta) \partial_1 f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \\ &\quad + \rho \cos(\theta) \partial_2 f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \\ &= -\rho \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial x}(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \\ &\quad + \rho \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \end{aligned}$$

Remarque 3.5.2.

On remarquera que l'on a alors, avec $x = \rho \cos(\theta)$ et

que $y = \rho \sin(\theta)$,

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial F}{\partial \rho}(\rho, \theta) &= x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y), \\ \frac{\partial F}{\partial \theta}(\rho, \theta) &= -y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y). \end{aligned}$$

L'opération inverse est moins immédiate : on a toujours $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, mais on ne peut relever directement un angle que sur un intervalle de longueur π au plus (voir figure 14). Le changement de variable devant être dérivable, on travaillera toujours sur un intervalle ouvert de longueur π en θ .

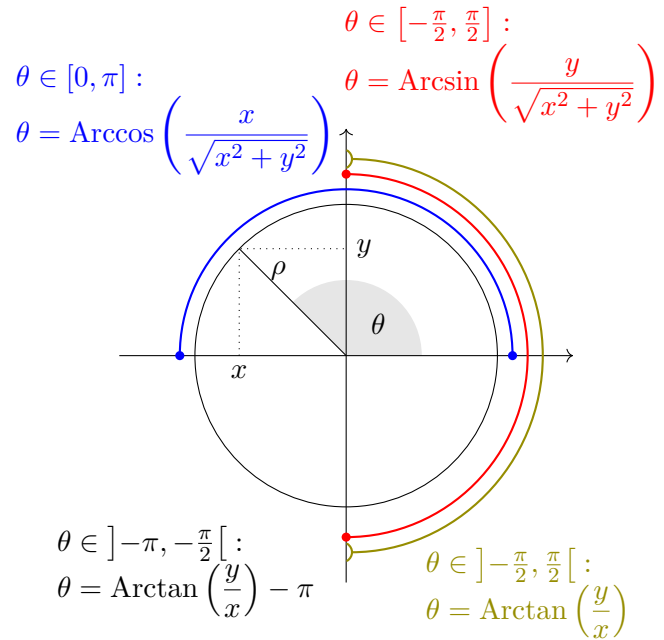


FIGURE 14 – Relèvements de l'angle par les fonctions trigonométriques inverses

Le plus souvent, on travaillera dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ (c'est-à-dire avec $x > 0$), on relève donc l'angle par la formule

$$\theta = \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)$$

ce qui donne le résultat suivant.

Corollaire 3.5.3 (passage des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes, cas $x > 0$).

Si $F : \mathbb{R}_+^* \times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est de classe $\mathcal{C}^1$, en notant

$$f(x, y) = F\left(\sqrt{x^2 + y^2}, \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)\right),$$

alors, f est classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

et $y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(F \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{Arctan} \left(\frac{y}{x} \right) \right) \right) \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \partial_1 F \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{Arctan} \left(\frac{y}{x} \right) \right) \\ &\quad - \frac{y}{x^2 + y^2} \partial_2 F \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{Arctan} \left(\frac{y}{x} \right) \right) \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial F}{\partial \rho} \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{Arctan} \left(\frac{y}{x} \right) \right) \\ &\quad - \frac{y}{x^2 + y^2} \frac{\partial F}{\partial \theta} \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{Arctan} \left(\frac{y}{x} \right) \right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(F \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{Arctan} \left(\frac{y}{x} \right) \right) \right) \\ &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \partial_1 F \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{Arctan} \left(\frac{y}{x} \right) \right) \\ &\quad + \frac{x}{x^2 + y^2} \partial_2 F \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{Arctan} \left(\frac{y}{x} \right) \right) \\ &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial F}{\partial \rho} \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{Arctan} \left(\frac{y}{x} \right) \right) \\ &\quad + \frac{x}{x^2 + y^2} \frac{\partial F}{\partial \theta} \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{Arctan} \left(\frac{y}{x} \right) \right)\end{aligned}$$

Remarque 3.5.4.

En notant $x = \rho \cos(\theta)$ et $y = \rho \sin(\theta)$, on obtient les formules (plus lisibles) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \cos(\theta) \frac{\partial F}{\partial \rho}(\rho, \theta) - \frac{\sin(\theta)}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \theta}(\rho, \theta), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \sin(\theta) \frac{\partial F}{\partial \rho}(\rho, \theta) + \frac{\cos(\theta)}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \theta}(\rho, \theta)\end{aligned}$$

On pouvait aussi inverser le système de la remarque 3.5.2 pour obtenir ces équations.

Exercice 3.5.5.

Écrire le relèvement de l'angle et la dérivation associée dans les cas $x < 0$, $y > 0$ et $y < 0$.

3.6 Dérivées partielles d'ordre 2

Définition 3.6.1.

Soit A un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que toutes les dérivées partielles de f admettent elles-mêmes des dérivées partielles par rapport à chacune des variables.

Alors, pour tout $1 \leq i, j \leq n$, on note

$$\partial_i \partial_j f(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)(a).$$

Dans le cas où $i = j$, on note cela

$$\partial_i^2 f(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a).$$

Si toutes les dérivées partielles secondes de f existent et sont continues, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$.

Exemple 3.6.2.

Toutes les fonctions polynomiales sont de classe $\mathcal{C}^2$.

Par exemple, avec $f : (x, y) \mapsto x^3 y + 2x^2 y^2 - 5xy + 2x$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 3x^2 y + 4xy^2 - 5y + 2, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x^3 + 4x^2 y - 5x,\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= 3x^2 + 8xy - 5, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= 3x^2 + 8xy - 5, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= 6xy + 4y^2, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= 4x^2.\end{aligned}$$

Exercice 3.6.3.

Calculer les dérivées d'ordre 2 des fonctions suivantes.

1. $g : (x, y) \mapsto \frac{1}{x^2 + y^2}$
2. $h : (x, y) \mapsto x e^{-y^2}$

Remarque 3.6.4.

Les résultats d'opérations sur les fonctions sont toujours valides sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.

Remarque 3.6.5.

La notation $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ indique que l'on dérive d'abord par rapport à x_j , puis par rapport à x_i .

Dans la plupart des cas, f est de classe $\mathcal{C}^2$, et le théorème suivant indique que l'ordre de dérivation n'est pas important.

Théorème 3.6.6 (Théorème de Schwarz).

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$, alors pour tout $1 \leq i, j \leq n$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Démonstration.Admis. $\square$ **Exercice 3.6.7.**

Soit $f, u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, et $\varphi : x \mapsto f(u(x))$.
Calculer $\varphi'(x)$ puis $\varphi''(x)$.

Exercice 3.6.8.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, soit la fonction g définie par

$$g(u, v) = f(u^2 + v^2, uv).$$

Calculer les dérivées secondes de g .

4 Extrema des fonctions de plusieurs variables

Définition 4.0.1 (maximum global et local).

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, $a \in A$ et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

- ▷ On dit que f admet un *maximum global* en a si, pour tout $x \in A$, $f(x) \leq f(a)$;
- ▷ On dit que f admet un *maximum local* en a s'il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in B(a, r) \cap A$, $f(x) \leq f(a)$.

On définit de manière analogue les notions de minimum global et local.

Définition 4.0.2 (minimum global et local).

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, $a \in A$ et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

- ▷ On dit que f admet un *minimum global* en a si, pour tout $x \in A$, $f(x) \geq f(a)$;
- ▷ On dit que f admet un *minimum local* en a s'il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in B(a, r) \cap A$, $f(x) \geq f(a)$.

Le terme générique pour désigner un maximum ou un minimum est *extremum*.

Remarque 4.0.3.

Un extremum peut être global sans être local, mais tout extremum global est aussi local.

Théorème 4.0.4 (Théorème des bornes atteintes).

Si A est une partie fermée, bornée et non vide de $\mathbb{R}^n$, et si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors f admet un maximum et un minimum sur A (i.e. f est bornée sur A , et atteint ses bornes).

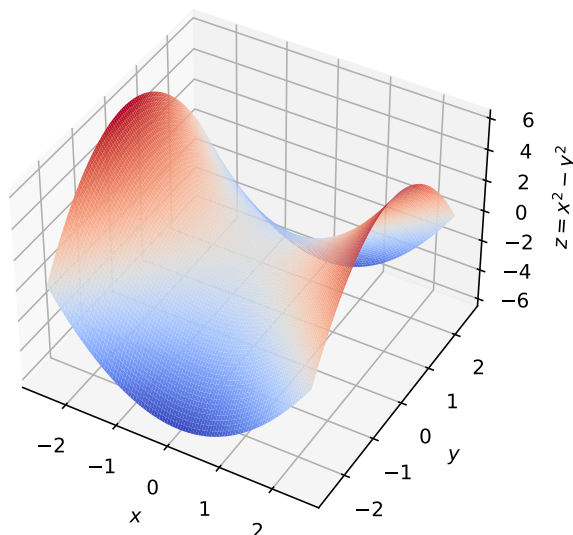
Démonstration.Admis $\square$ 

FIGURE 15 – Représentation d'un point selle.

Remarque 4.0.5.

C'est un prolongement du théorème des bornes atteintes de première année : une fonction réelle continue et définie sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Ici, l'hypothèse « A est fermée et bornée » remplace l'hypothèse « I est un segment ». Remarquons qu'un segment est bien une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}$.

Exercice 4.0.6.

Soit $C = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1 \text{ et } -1 \leq y \leq 1 \}$ et f définie sur C par $f(x, y) = x^2 y$.

Montrer que f admet un maximum et un minimum sur C .

Théorème 4.0.7.

Soit A un ouvert de $\mathbb{R}^n$, soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Si f admet un extremum local en a , alors a est un point critique pour f (i.e. $\nabla f(a) = 0$).

Démonstration.

Il suffit d'appliquer le résultat de première année sur les fonctions partielles : elles admettent un extremum local en la composante de a correspondante, donc leurs dérivées sont nulle en ce point. $\square$

Remarque 4.0.8 (voir figure 15).

La réciproque est fautive, par exemple le point $(0, 0)$ est un point critique non extrémal de $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$ (on parle ici de *point selle*, ou de *point col*).

Exercice 4.0.9.

En s'aidant de la figure 15, montrer que la fonction $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$ admet un point critique en $(0, 0)$, qui n'est pas le lieu d'un extremum local.

Méthodologie de recherche des extrema d'une fonction de plusieurs variables

1. Justifier l'existence des extrema. Le plus souvent, f est continue sur une partie fermée et bornée (une boule ou un rectangle fermés) : on utilise le théorème des bornes atteintes.
2. Étude sur l'intérieur du domaine de définition. C'est un ouvert, sur lequel les points extrémaux sont des points critiques. On dresse donc la liste des points critiques, ce qui fournit une liste de « candidats » au titre d'extremum.
3. Étude sur les bords du domaine de définition. L'expression des bords permet souvent d'y écrire f en fonction d'une seule variable, ce qui permet de trouver relativement facilement les valeurs extrémales prises par f (par les moyens d'étude classique d'une fonction d'une variable réelle). Ces « extrema sur les bords » rejoignent la liste des candidats au titre d'extremum global.
4. Bilan. On compare tous les candidats entre eux et on en déduit les véritables extrema globaux.

Exercice 4.0.1.

Déterminer les extrema globaux de $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 + 2xy - 6x$ sur le carré $[-4; 4]^2$.

Exercice 4.0.2.

Étudier les extrema globaux de $f : (x, y) \mapsto 2x^2 + 2xy + 2y^2 - 4x + 2y + 7$ sur $\mathbb{R}^2$.

On trouvera un point critique (a, b) de f et l'on étudiera $g(h, \ell) = f(a + h, b + \ell)$.

5 Exemples de résolutions d'équations aux dérivées partielles

On vous donnera le plus souvent un changement de variable (polaire ou affine, normalement) afin de résoudre les équations aux dérivées partielles qui vous sont posées.

On arrivera souvent à des cas simples, que voici.

Dans ce chapitre, f est une fonction supposée de classe $\mathcal{C}^1$, et l'on se place dans le cas où $n = 2$ (tout cela se généralise bien entendu immédiatement).

Proposition 5.0.1.

Soit g, h deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, définies sur deux intervalles, et G, H deux primitives respectivement de g et de h .

1. Les solutions $\mathcal{C}^1$ de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = g(x)h(y)$$

sont les fonctions f de la forme

$$f : (x, y) \mapsto G(x)h(y) + C(y),$$

où C est une fonction quelconque, de classe $\mathcal{C}^1$.

2. Les solutions $\mathcal{C}^1$ de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = g(x)h(y)$$

sont les fonctions f de la forme

$$f : (x, y) \mapsto g(x)H(y) + C(x),$$

où C est une fonction quelconque, de classe $\mathcal{C}^1$.

Démonstration.

On démontre le premier cas, le second est complètement analogue. On notera I l'intervalle de définition de g et J celui de h . Soit $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Supposons que f est solution de l'équation $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = g(x)h(y)$, soit $y \in J$. On peut donc primitiver la relation précédente, à y fixé : il existe donc une constante C telle que, pour tout $x \in I$, $f(x, y) = G(x)h(y) + C$. Remarquons que, vu que l'on travaille à y fixé, cette constante C dépend de y : on la notera donc $C(y)$. On a donc construit une fonction $C : J \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x, y) \in I \times J$, $f(x, y) = G(x)h(y) + C(y)$. Fixons $x \in I$. On a donc, pour tout $y \in J$, $C(y) = f(x, y) - G(x)h(y)$. Comme x est fixé, et comme f et h sont $\mathcal{C}^1$, la fonction C est aussi $\mathcal{C}^1$, comme différence de deux telles fonctions. On a donc bien démontré que f est de la forme demandée.

Réciproquement, si C est de classe $\mathcal{C}^1$, et si f vérifie, pour tout $(x, y) \in I \times J$, $f(x, y) = G(x)h(y) + C(y)$, alors en fixant $y \in J$ et en dérivant partiellement ceci par rapport à x , on a bien, pour tout $x \in I$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = g(x)h(y)$. $\square$

Exemple 5.0.2.

Les solutions $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ de l'équation $\frac{\partial f}{\partial x} = x$ sont les fonctions de la forme $(x, y) \mapsto \frac{x^2}{2} + C(y)$.

Les solutions $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ de l'équation $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{y}$ sont les fonctions de la forme $(x, y) \mapsto x \ln(y) + C(x)$.

Exercice 5.0.3.

Trouver les fonctions $\mathcal{C}^1$ de deux variables solutions des équations suivantes.

1. $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$
2. $\frac{\partial f}{\partial x} = f$ (raisonner d'abord à y fixé)

La méthode principale de résolution (non immédiate) est celle du changement de variables. Il vous sera indiqué.

Exemple 5.0.4.

En posant $u = x + y$ et $v = x - y$, trouvons les

solutions $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ de

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 2. \quad (1)$$

Commençons par écrire la relation

$$f(x, y) = F(u, v).$$

Remarquons que l'on sait toujours résoudre le système :

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}$$

Pour cela, pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, on considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$F : (u, v) \mapsto f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right).$$

On a donc pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x, y) = F(x + y, x - y).$$

En appliquant la règle de la chaîne, on obtient, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $u = x + y$, $v = x - y$:

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

Ainsi, f est solution de l'équation différentielle (1) si et seulement si pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 1,$$

ce qui équivaut à dire que F est de la forme $F : (u, v) \mapsto u + h(v)$, où h est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ quelconque.

Ainsi, les solutions sont les fonctions de la forme

$$f : (x, y) \mapsto (x + y) + h(x - y),$$

où h est une fonction $\mathcal{C}^1$ quelconque.

Exercice 5.0.5.

Trouver les fonctions $\mathcal{C}^1$ solutions des équations suivantes.

1. Sur $\mathbb{R}^2$: $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = x - y$, en posant $u = x + y$ et $v = x - y$
2. Sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$: $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ en posant $x = \rho \cos(\theta)$ et $y = \rho \sin(\theta)$.
3. Sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$: $y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + y^2$ en posant $x = \rho \cos(\theta)$ et $y = \rho \sin(\theta)$.

Exercice 5.0.6.

On considère l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x + y, \quad (\mathcal{E})$$

où f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. On pose $x = u + v$ et $y = u - v$, i.e. on considère la fonction g définie par

$$g(u, v) = f(u + v, u - v).$$

Calculer $\frac{\partial^2 g}{\partial^2 u}$ et résoudre $(\mathcal{E})$.

6 Applications géométriques

6.1 Courbes implicites

Dans cette partie, on considère que $n = 2$, et l'on considère une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Définition 6.1.1.

On appelle *courbe d'équation* $f(x, y) = 0$ l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant l'équation $f(x, y) = 0$.

Exemple 6.1.2.

Avec $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$, cette courbe est le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1.

Si $a > 0$ et $b > 0$, la courbe d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ est l'ellipse de centre $(0, 0)$ et de demi-grands axes de longueurs a et b (voir figure 16).

Si $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, avec $f : (x, y) \mapsto y - g(x)$, la courbe d'équation $f(x, y) = 0$ est tout simplement le graphe de f .

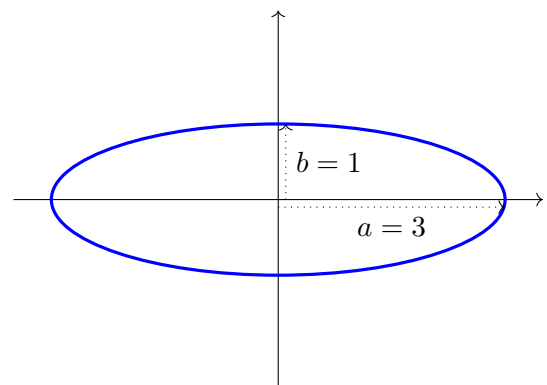


FIGURE 16 – Ellipse d'équation $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$, de demi-grands axes de longueurs 3 et 1.

Les exemples de cercle et d'ellipse sont des cas particuliers de la notion suivante.

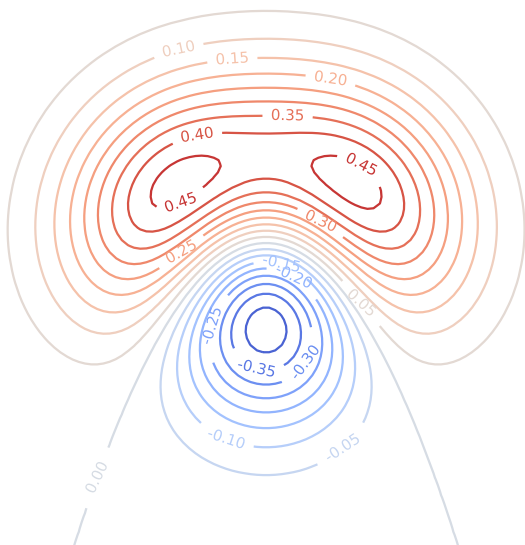


FIGURE 17 – Lignes de niveau de $f : (x, y) \mapsto (x^2 + y)e^{-(x^2 + y^2)}$.

Définition 6.1.3 (lignes de niveau).

Soit $k \in \mathbb{R}$. La ligne de niveau d'altitude k pour la fonction f est la courbe d'équation $f(x, y) = k$: c'est l'ensemble

$$\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = k \}.$$

Exemple 6.1.4.

Cet ensemble peut être vide (prendre $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ et $k = -1$), réduit à un point (même exemple avec $k = 0$) ou peut être une « vraie courbe » (avec $k = 1$, on obtient un cercle), comme nous allons le voir.

Définition 6.1.5.

Un point $a \in \mathbb{R}^2$ d'une courbe d'équation $f(x, y) = 0$ est dit *régulier* si $\nabla f(a) \neq \vec{0}$.

Exemple 6.1.6.

La fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ a un point non régulier : $(0, 0)$. La courbe d'équation $x^2 + y^2 = 0$ est réduite au point $(0, 0)$: c'est un cas dégénéré, que nous allons exclure par la suite en ne considérant que des points réguliers.

Exemple 6.1.7.

Les lignes de niveau de la fonction $f : (x, y) \mapsto (x^2 + y)e^{-(x^2 + y^2)}$ sont représentées dans la figure 17.

Si l'on considère un point régulier a , et si l'on pose $k = f(a)$, alors on peut montrer (par le théorème

des fonctions implicites, complètement hors de votre portée) qu'autour de a , la ligne de niveau de f d'altitude k correspond à un arc paramétré, que l'on note γ . Cette fonction γ est donc une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, et l'on peut supposer que $\gamma(0) = a$.

On a donc pour tout $t \in I$, $f(\gamma(t)) = k$, et en dérivant cela on obtient, pour tout $t \in I$, par la règle de la chaîne :

$$\langle \gamma'(t), \nabla f(\gamma(t)) \rangle = 0.$$

Notamment, en $t = 0$

$$\gamma'(0) \perp \nabla f(a).$$

Or, nous savons que le vecteur $\gamma'(0)$ dirige la tangente à cet arc paramétré en a .

Cela motive donc la définition suivante.

Définition 6.1.8 (tangente à une courbe implicite en un point régulier).

Si $a \in \mathbb{R}^2$ est un point régulier sur la courbe d'équation $f(x, y) = 0$, alors la tangente à cette courbe en le point a est la droite :

- ▷ qui passe par a ;
- ▷ orthogonale à $\nabla f(a)$.

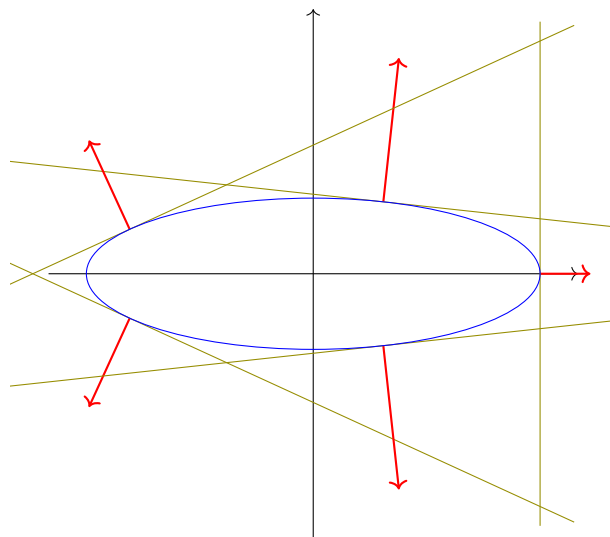


FIGURE 18 – Ellipse d'équation $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$, gradients associés et quelques tangentes.

Remarque 6.1.9 (voir figures 20 et 21).

Pour une fonction de deux variables, le gradient est toujours orthogonal à ses lignes de niveau.

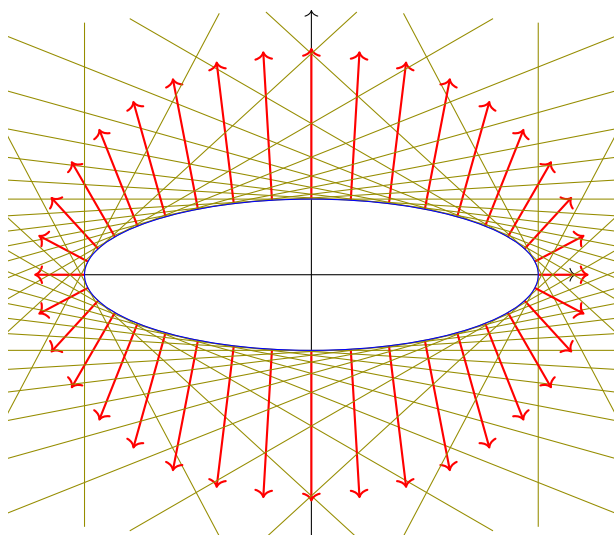


FIGURE 19 – Ellipse d'équation $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$, gradients associés et beaucoup de tangentes.

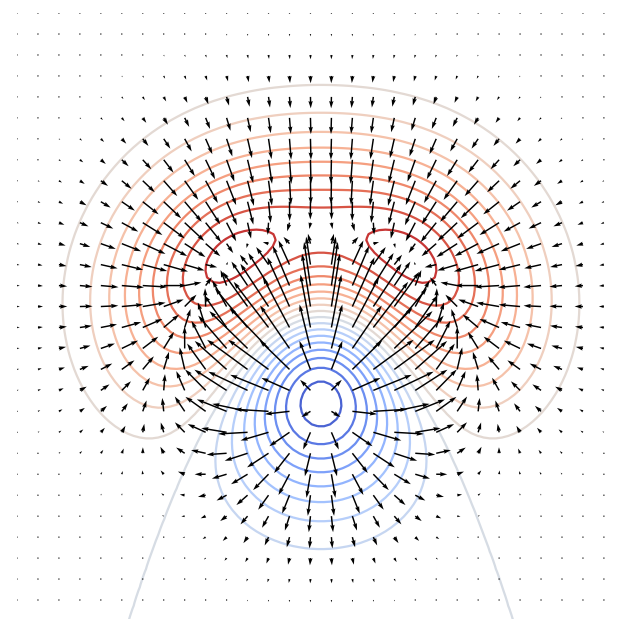


FIGURE 20 – Pour $f : (x, y) \mapsto (x^2 + y)e^{-(x^2 + y^2)}$, champ du gradient et lignes de niveaux.

Exercice 6.1.10.

On considère l'ellipse d'équation $x^2 + 9y^2 = 9$.

1. Déterminer les points de cette ellipse en lesquels la tangente est parallèle à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 2x$.
2. Déterminer les points de cette ellipse en lesquels la tangente passe par le point de coordonnées $(0, 2)$.

6.2 Surfaces implicites

Dans cette partie, on considère que $n = 3$, et l'on considère une fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Définition 6.2.1.

On appelle *surface d'équation* $f(x, y, z) = 0$ l'ensemble des points $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant l'équation $f(x, y, z) = 0$.

Exemple 6.2.2.

Avec $f : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 1$, cette courbe est la sphère de centre $(0, 0)$ et de rayon 1.

Si $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, avec $f : (x, y, z) \mapsto z - g(x, y)$, la surface d'équation $f(x, y, z) = 0$ est tout simplement le graphe de f .

Définition 6.2.3.

Un point $a \in \mathbb{R}^3$ d'une surface d'équation $f(x, y, z) = 0$ est dit *régulier* si $\nabla f(a) \neq \vec{0}$.

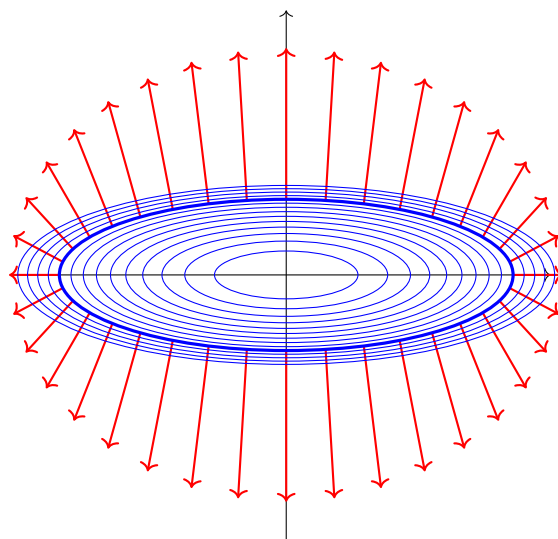


FIGURE 21 – Lignes de niveau de $(x, y) \mapsto \frac{x^2}{9} + y^2$, gradients pour $k = 1$ (ellipse).

Exercice 6.2.4 (Parapluie de Cartan).

La surface d'équation $z(x^2 + y^2) = x^3$ contient une droite formée de points non réguliers. Trouvez-la !

Définition 6.2.5 (plan tangent à une surface implicite en un point régulier).

Si $a \in \mathbb{R}^3$ est un point régulier sur la surface d'équation $f(x, y, z) = 0$, alors le plan tangent à cette

courbe en le point a est le plan :

- ▷ qui passe par a ;
- ▷ de vecteur normal $\nabla f(a)$.

Exercice 6.2.6 (Ellipsoïde de révolution).

Déterminer les points de la surface d'équation $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$ en lesquels le plan tangent à cette surface contient le point A de coordonnées $(0, 0, 1)$.

Exercice 6.2.7 (Hyperboloïde de révolution).

Déterminer les points de la surface d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ en lesquels le plan tangent à cette surface est parallèle au plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + y = 0$.

Remarque 6.2.8.

Dans le cas d'une surface d'équation $z = g(x, y)$, où g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, en un point $a = (x_0, y_0, z_0)$ (on a donc $z_0 = g(x_0, y_0)$), on a $f : (x, y, z) \mapsto z - g(x, y)$. Le gradient de f en a est alors

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} -\partial_1 g(x_0, y_0) \\ -\partial_2 g(x_0, y_0) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le plan tangent à cette surface en a a pour équation

$$(x - x_0)\partial_1 g(x_0, y_0) + (y - y_0)\partial_2 g(x_0, y_0) = z - z_0,$$

ou encore

$$(x - x_0)\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = z - z_0.$$

Deux vecteurs directeurs de ce plan sont donc

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\partial_1 g(x_0, y_0) \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\partial_2 g(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Remarquons enfin que l'équation de ce plan tangent est donnée par le développement limité à l'ordre 1 de g : cette équation s'écrit

$$z = z_0 + \langle \nabla g(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle.$$

Remarque 6.2.9.

Dans le cas d'une surface d'équation $z = g(x, y)$, où g est de classe $\mathcal{C}^1$, considérons un point (x_0, y_0) , et un autre point (x, y) .

Pour ce dernier point, nous avons deux altitudes :

- ▷ celle sur la surface : $z = g(x, y)$;
- ▷ celle sur le plan tangent à la surface en (x_0, y_0) :

$$\begin{aligned} z' &= g(x_0, y_0) + (x - x_0)\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \\ &\quad + (y - y_0)\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

On détermine la position de la surface par rapport à son plan tangent en (x_0, y_0) en comparant z et z' :

- ▷ si $z > z'$, la surface est au-dessus de plan tangent, en ce point ;
- ▷ si $z < z'$, la surface est en dessous de plan tangent, en ce point ;
- ▷ si $z = z'$, la surface et le plan tangent s'intersectent, en ce point.

Exemple 6.2.10.

On a représenté dans la figure 22 la surface d'équation $x^2 + y^2 = z$ (paraboloïde de révolution), un plan tangent, un vecteur normal (en rouge) et les deux vecteurs directeurs du plan décrits ci-dessus (en vert).

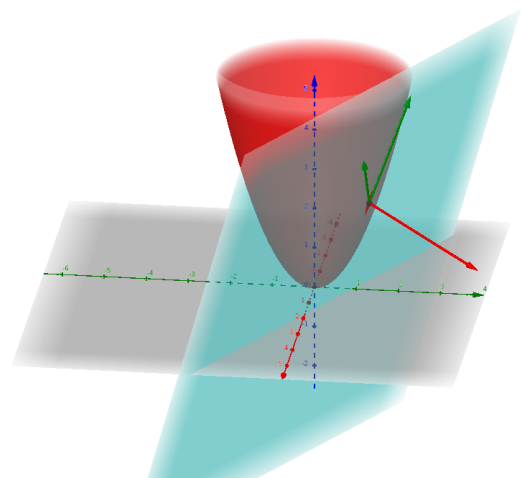


FIGURE 22 – Plan tangent à la surface d'équation $z = x^2 + y^2$.

Exercice 6.2.11.

Déterminer le plan tangent à la surface d'équation $z = x^2 + y^2$ au point $x_0 = 1, y_0 = 2$, et montrer que cette surface est toujours au-dessus de ce plan tangent.

Exercice 6.2.12.

Déterminer le plan tangent à la surface d'équation $z = x^2 - y^3$ au point $x_0 = 2, y_0 = 3$, puis donner la position de la surface par rapport à son plan tangent.

7 Avec Python

On importera les bibliothèques suivantes.

```
1 from mpl_toolkits import mplot3d
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
```

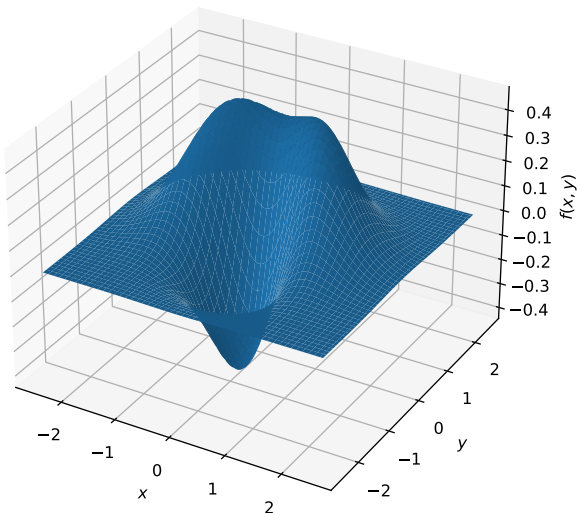
On étudie dans cet exemple la fonction $f : (x, y) \mapsto (x^2 + y)e^{-(x^2 + y^2)}$. On utilise pour cela les fonctionnalités de `numpy`.

```

4 def f(x, y):
5     return (x**2+y)*np.exp(-(x**2+y
    ↪ **2))
6
7 x = np.linspace(-2.5, 2.5, 100)
8 y = np.linspace(-2.5, 2.5, 100)
9
10 X, Y = np.meshgrid(x, y)
11 Z = f(X, Y)
12
13 plt.clf()
14 ax = mplot3d.Axes3D(plt.figure())
15 ax.plot_surface(X, Y, Z)
16 ax.set_xlabel('x')
17 ax.set_ylabel('y')
18 ax.set_zlabel('f(x,y)')
19 plt.show()

```

Cela donne la figure suivante.



On préférera souvent avoir une échelle de couleurs indiquant les altitudes.

```

20 from matplotlib import cm
21 ax.plot_surface(X, Y, Z, cmap=cm.
    ↪ coolwarm)

```

Cela donne la figure suivante.

