

X Fonctions à valeurs vectorielles et courbes paramétrées

Dans tout ce chapitre, n désigne un entier naturel, supérieur ou égal à deux, et I est un intervalle de $\mathbb{R}$. En pratique, nous traiterons des exemples dans les cas $n = 2$ et $n = 3$ uniquement.

Dans tout ce chapitre, on pourra identifier $\mathbb{R}^n$ à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que l'on pourra noter verticalement les éléments de $\mathbb{R}^n$.

1. Fonctions à valeurs vectorielles

1.1. Régularité

Définition 1.1.1.

On appelle *fonction à valeurs vectorielles*, ou *fonction vectorielle*, toute fonction $\mathbf{f}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Si

$$\mathbf{f}: t \mapsto \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix},$$

alors les fonctions $f_1, \dots, f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$ sont appelées *fonctions coordonnées* de $\mathbf{f}$.

Exemple 1.1.2.

Voici une fonction vectorielle à valeurs dans $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{f}: \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Ses deux fonctions coordonnées sont les fonctions cosinus et sinus, définies sur $\mathbb{R}$.

Voici une fonction vectorielle à valeurs dans $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{g}: \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto \begin{pmatrix} \ln(t) \\ t \cos(t) \\ \sqrt{t} \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Ses trois fonctions coordonnées sont $g_1: t \mapsto \ln(t)$, $g_2: t \mapsto t \cos(t)$ et $g_3: t \mapsto \sqrt{t}$, toutes trois définies sur $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$.

Remarque 1.1.3.

On traitera les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ comme des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, en considérant les parties réelles et imaginaires de ces fonctions.

Par exemple, la fonction $t \mapsto te^{it} = t \cos(t) + it \sin(t)$ se manipulera exactement comme la fonction $t \mapsto \begin{pmatrix} t \cos(t) \\ t \sin(t) \end{pmatrix}$.

Définition 1.1.4 (continuité, dérivabilité).

Soit $\mathbf{f}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $a \in I$. On dit que $\mathbf{f}$ est *continue* (resp. *dérivable*) en a si ses fonctions coordonnées $f_1, \dots, f_n$ le sont.

On dit que $\mathbf{f}$ est *continue sur I* (resp. *dérivable sur I*) si $\mathbf{f}$ est continue (resp. dérivable) en tout $a \in I$.

Définition 1.1.5 (dérivée).

Si $\mathbf{f}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ a pour fonctions coordonnées les fonctions $f_1, \dots, f_n$ et est dérivable en $a \in I$, alors on définit

$$\mathbf{f}'(a) = \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ \vdots \\ f_n'(a) \end{pmatrix}.$$

Si $\mathbf{f}$ est dérivable sur I , cela définit une fonction $\mathbf{f}': I \rightarrow \mathbb{R}^n$, appelée *fonction dérivée de $\mathbf{f}$* .

Remarque 1.1.6.

On utilisera le symbole $\frac{d}{dt}$ pour dériver une expression (par rapport à t).

Exemple 1.1.7.

Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction vectorielle

$$\mathbf{f}: \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto \begin{pmatrix} t^2 \\ \sqrt{t} \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Lorsque c'est possible, calculer $\mathbf{f}'$.

Exemple 1.1.8.

Soit $\mathbf{f}: t \mapsto te^{it}$. Justifier que $\mathbf{f}$ est dérivable, et déterminer $\mathbf{f}'$.

Remarque 1.1.9.

Les notions précédentes de continuité et de dérivabilité s'étendent immédiatement aux notions de continuité à gauche (et à droite), ainsi que de dérivabilité à gauche (et à droite), et de dérivées à gauche et à droite.

Remarque 1.1.10 (interprétation cinématique, voir figure 1).

Si un mobile se déplace dans le plan, muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, des temps t_0 à t_1 , si l'on note $M(t)$ sa position à un temps t , alors on

vient de définir une fonction vectorielle

$$\begin{aligned} [t_0, t_1] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \overrightarrow{OM(t)} \end{aligned}$$

Les exemples provenant de la mécanique seront tous continus (il n'y a pas de téléportation). Le caractère dérivable de cette fonction indique une courbe « lisse », le vecteur $\frac{d}{dt}(\overrightarrow{OM(t)})$ étant le vecteur vitesse du mobile au temps t .

Les fonctions ainsi étudiées ne seront pas toutes dérivables : lors d'un choc (par exemple lors du rebond d'une balle sur le sol), cette fonction n'est plus nécessairement dérivable.

C'est exactement la même chose si l'on étudie un mouvement d'un point M dans l'espace : on obtient une fonction vectorielle définie sur $[t_0, t_1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^3$.

Exemple 1.1.11 (Rebond d'une balle).

On considère une balle de masse m et de rayon négligeable, que l'on lance d'une altitude $H_0 = 4$ m à une vitesse horizontale $V_x = 0,5$ m.s⁻¹, au temps $t_0 = 0$ s. On néglige les frottements de l'air.

Au temps t , on note $\mathbf{B}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ la position de la balle.

Les lois de la dynamique indiquent que la balle touche le sol au temps $t_1 = \sqrt{\frac{2H_0}{g}}$. On a alors l'équation du mouvement, qui nous donne que pour $t \in [t_0, t_1]$, on obtient $x(t) = V_x t$ et $y(t) = H_0 - \frac{1}{2}gt^2$, ce qui s'écrit aussi

$$\mathbf{B}(t) = \begin{pmatrix} V_x t \\ H_0 - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}.$$

Il y a alors un rebond. On suppose que $E = 80\%$ de la vitesse verticale $V_{y,0}$ est restituée. On a $V_{y,0} = -\sqrt{2gH_0}$, et l'on note $V_{y,1} = -EV_{y,0} = E\sqrt{2gH_0}$.

Les lois de la dynamique indiquent que la balle touche le sol une deuxième fois au temps $t_2 = t_1 + 2Et_1$. On a alors l'équation du mouvement, qui nous donne que pour $t \in [t_1, t_2]$, on obtient $x(t) = V_x t$ et $y(t) = V_{y,1} - \frac{1}{2}gt^2$, ce qui s'écrit aussi

$$\mathbf{B}(t) = \begin{pmatrix} V_x t \\ V_{y,1}(t - t_1) - \frac{1}{2}g(t - t_1)^2 \end{pmatrix}.$$

On a tracé ce mouvement dans la figure 1.

La première fonction coordonnée de $\mathbf{B}$ est donc

$$\begin{aligned} x : [t_0, t_2] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto V_x t \end{aligned}$$

et la seconde fonction coordonnée de $\mathbf{B}$ est

$$\begin{aligned} y : [t_0, t_2] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \begin{cases} H_0 - \frac{1}{2}gt^2 & \text{si } t \leq t_1 \\ V_{y,1}(t - t_1) - \frac{1}{2}g(t - t_1)^2 & \text{si } t > t_1 \end{cases} \end{aligned}$$

On remarque que $\mathbf{B}$ est dérivable sur $[t_0, t_1[$ et sur $]t_1, t_2]$. Par exemple, si $0 \leq t < t_1$,

$$\mathbf{B}'(t) = \begin{pmatrix} V_x \\ -gt \end{pmatrix}.$$

De plus, $\mathbf{B}$ est dérivable à droite et à gauche en t_1 , mais n'est pas dérivable en t_1 . On a en effet

$$\mathbf{B}'_g(t_1) = \begin{pmatrix} V_x \\ -gt_1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} V_x \\ V_{y,1} \end{pmatrix} = \mathbf{B}'_d(t_1).$$

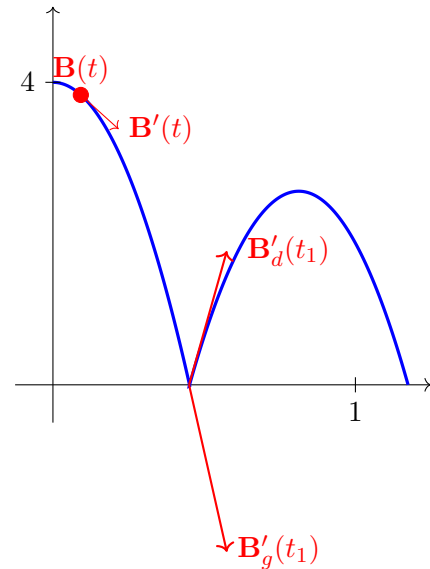


FIGURE 1 – Premier rebond d'une balle.

Proposition 1.1.12 (dérivée d'une combinaison linéaire).

Soit $\mathbf{f}, \mathbf{g} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ dérivables, soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Alors, $\lambda\mathbf{f} + \mu\mathbf{g}$ est dérivable et

$$(\lambda\mathbf{f} + \mu\mathbf{g})' = \lambda\mathbf{f}' + \mu\mathbf{g}'.$$

Démonstration.

Il suffit de noter $f_1, \dots, f_n$ les fonctions coordonnées de $\mathbf{f}$, et $g_1, \dots, g_n$ celles de $\mathbf{g}$. Alors,

$$\lambda\mathbf{f} + \mu\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \lambda f_1 + \mu g_1 \\ \vdots \\ \lambda f_n + \mu g_n \end{pmatrix}.$$

Chaque coordonnée est une combinaison linéaire de fonctions dérivables, donc est dérivable. Ensuite,

$$\begin{aligned} (\lambda \mathbf{f} + \mu \mathbf{g})' &= \begin{pmatrix} (\lambda f_1 + \mu g_1)' \\ \vdots \\ (\lambda f_n + \mu g_n)' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda f_1' + \mu g_1' \\ \vdots \\ \lambda f_n' + \mu g_n' \end{pmatrix} \\ &= \lambda \mathbf{f}' + \mu \mathbf{g}'. \end{aligned}$$

□

Proposition 1.1.13 (produit par une fonction scalaire).

Soit $\mathbf{f} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ dérivable, soit $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

Alors, la fonction $\varphi \mathbf{f} : t \mapsto \varphi(t)\mathbf{f}(t)$ est dérivable, et

$$(\varphi \mathbf{f})' = \varphi' \mathbf{f} + \varphi \mathbf{f}'.$$

Démonstration.

Il suffit de noter $f_1, \dots, f_n$ les fonctions coordonnées de $\mathbf{f}$. Alors,

$$\varphi \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \varphi f_1 \\ \vdots \\ \varphi f_n \end{pmatrix}.$$

Chaque coordonnée est un produit de fonctions dérivables, donc est dérivable. Ensuite,

$$\begin{aligned} (\varphi \mathbf{f})' &= \begin{pmatrix} (\varphi f_1)' \\ \vdots \\ (\varphi f_n)' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varphi' f_1 + \varphi f_1' \\ \vdots \\ \varphi' f_n + \varphi f_n' \end{pmatrix} \\ &= \varphi' \mathbf{f} + \varphi \mathbf{f}'. \end{aligned}$$

□

Remarque 1.1.14 ().

Dans le dernier résultat, les fonctions φ et $\mathbf{f}$ n'ont pas le même rôle. En effet, φ est à valeurs scalaires et $\mathbf{f}$ à valeurs vectorielles. Multiplier deux vecteurs n'a pas de sens !

Exercice 1.1.15.

Dériver les fonctions suivantes.

1. $\mathbf{f} : t \mapsto e^t \begin{pmatrix} t+1 \\ t(t-1) \end{pmatrix}$
2. $\mathbf{g} : t \mapsto \sqrt{t} \begin{pmatrix} t \cos(t) \\ 1 - \tan(t) \end{pmatrix}$

Exercice 1.1.16.

On reprend la fonction $\mathbf{f}$ de l'exercice 1.1.8. Dériver $\mathbf{f}$.

Définition 1.1.17 (classes de régularité).

Soit $\mathbf{f} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, soit $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

On dit que $\mathbf{f}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I si ses fonctions coordonnées $f_1, \dots, f_n$ le sont.

On note $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. C'est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

On dit que $\mathbf{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si $\mathbf{f}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 1.1.18.

Déterminer la classe de régularité de la fonction $\mathbf{f}$ de l'exercice 1.1.7, sur $\mathbb{R}_+^*$ ainsi que sur $\mathbb{R}_+$.

Remarque 1.1.19.

De même, on définit ce qu'est une fonction vectorielle k -fois dérivable.

Si $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ est k -fois dérivable, on définit sa dérivée k^e par

$$\mathbf{f}^{(k)} = \begin{pmatrix} f_1^{(k)} \\ \vdots \\ f_n^{(k)} \end{pmatrix}.$$

La fonction dérivée seconde $\mathbf{f}''$ s'interprète cinématiquement comme le vecteur accélération du mouvement.

Exercice 1.1.20.

On reprend la fonction $\mathbf{f}$ de l'exercice 1.1.8. Justifier que $\mathbf{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Calculer $\mathbf{f}''$, $\mathbf{f}'''$ et $\mathbf{f}^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1.2. Exemples géométriques

Considérons un plan euclidien, muni d'un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$, ou un espace euclidien muni d'un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Si $\mathbf{f} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dérivable, considérons pour tout $t \in I$ le point $M(t)$ tel que $\overrightarrow{OM(t)}$ a pour coordonnées $\mathbf{f}(t)$ dans $\mathcal{R}$.

Si $n = 2$, avec $\mathbf{f}(t) = (x(t), y(t))$, on a donc

$$\overrightarrow{OM(t)} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}.$$

Si $n = 3$, avec $\mathbf{f}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, on a donc

$$\overrightarrow{OM(t)} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

On peut donc dériver composante par composante ce vecteur. Notamment, pour tout point $A \in \mathbb{R}^n$:

$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{AM(t)}) = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM(t)}) = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OM(t)}).$$

La relation précédente indique que la dérivation vectorielle ne dépend pas de l'origine du repère choisie. De même, si l'on définit un autre repère $\mathcal{R}_2$ d'origine O , en notant P la matrice de passage de la base de $\mathcal{R}$ vers celle de $\mathcal{R}_2$, et $\mathbf{g}(t)$ les coordonnées de $\overrightarrow{OM(t)}$ dans $\mathcal{R}_2$, la relation de changement de base donne, pour tout $t \in I$,

$$\mathbf{f}(t) = P\mathbf{g}(t).$$

Comme P est constante, on peut dériver cette relation par rapport à t , ce qui donne

$$\mathbf{f}'(t) = P\mathbf{g}'(t).$$

Cette relation indique que la dérivation vectorielle ne dépend pas du repère choisi, et est donc intrinsèque, ce qui permet de donner un sens à l'écriture $\frac{d}{dt}(\overrightarrow{OM(t)})$ et à la notion de « vecteur vitesse », sans précision de repère.

Dans la suite, on travaillera directement dans $\mathbb{R}^n$, muni de son produit scalaire usuel et de son repère canonique. Toutefois, les résultats suivants sont toujours valides si l'on travaille dans un plan ou dans un espace euclidien quelconque, indifféremment du repère (orthonormé direct) choisi pour exprimer les coordonnées des objets manipulés.

a. Produit scalaire et norme

Dans cette partie, on considère indifféremment $n = 2$ ou $n = 3$. On considère donc $\mathbb{R}^n$, muni de son produit scalaire usuel, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et de sa norme usuelle, notée $\|\cdot\|$.

Les résultats suivants seront toujours vrais pour un produit scalaire quelconque, et sa norme associée (ces notions seront vues ultérieurement).

Proposition 1.2.1.

Soit $\mathbf{f}, \mathbf{g} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux fonctions vectorielles dérivables.

Alors, l'application

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle : \begin{cases} I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t) \rangle \end{cases}$$

est dérivable, et pour tout $t \in I$:

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t) \rangle = \langle \mathbf{f}'(t), \mathbf{g}(t) \rangle + \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{g}'(t) \rangle$$

Démonstration.

On l'écrit pour $n = 2$: on note

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = f_1 g_1 + f_2 g_2,$$

qui est bien dérivable par opérations sur les fonctions dérivables, et que l'on dérive en

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle' &= f_1' g_1 + f_1 g_1' + f_2' g_2 + f_2 g_2' \\ &= f_1' g_1 + f_2' g_2 + f_1 g_1' + f_2 g_2' \\ &= \langle \mathbf{f}', \mathbf{g} \rangle + \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}' \rangle. \end{aligned}$$

□

Corollaire 1.2.2 (HP, assez utile).

Soit $\mathbf{f} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle dérivable.

Alors, l'application

$$\|\mathbf{f}\|^2 : \begin{cases} I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto \|\mathbf{f}(t)\|^2 \end{cases}$$

est dérivable, et pour tout $t \in I$:

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{f}(t)\|^2 = 2\langle \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t) \rangle.$$

Démonstration.

Il suffit de voir que $\|\mathbf{f}\|^2 = \langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle$ et d'appliquer le résultat précédent. □

Proposition 1.2.3.

Soit $\mathbf{f} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle dérivable ne s'annulant pas.

Alors, l'application

$$\|\mathbf{f}\| : \begin{cases} I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto \|\mathbf{f}(t)\| \end{cases}$$

est dérivable, et pour tout $t \in I$:

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{f}(t)\| = \frac{\langle \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t) \rangle}{\|\mathbf{f}(t)\|}.$$

Démonstration.

Il suffit de voir que pour tout $t \in I$:

$$\|\mathbf{f}(t)\| = \sqrt{\|\mathbf{f}(t)\|^2},$$

et d'utiliser le résultat du corollaire précédent, en composant par la fonction racine carrée. □

Exercice 1.2.4.

Soit M une fonction dérivable, définie sur un intervalle I et à valeurs dans un cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $r > 0$.

Montrer que pour tout $t \in I$, le vecteur $\frac{d}{dt}(\overrightarrow{OM(t)})$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{\Omega M(t)}$.

La réciproque est-elle vraie ?

b. Dans le plan

Dans cette partie, on se place dans $\mathbb{R}^2$ (i.e. $n = 2$).

Proposition 1.2.5.

Soit $\mathbf{f}, \mathbf{g} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ deux fonctions vectorielles dérivables, soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^2$.

Alors, la fonction

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) : \begin{cases} I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto \det_{\mathcal{B}}(\mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)) \end{cases}$$

est dérivable, et pour tout $t \in I$:

$$\frac{d}{dt}(\det_{\mathcal{B}}(\mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t))) = \det_{\mathcal{B}}(\mathbf{f}'(t), \mathbf{g}(t)) + \det_{\mathcal{B}}(\mathbf{f}(t), \mathbf{g}'(t)).$$

Démonstration.

On le démontre dans le cas où $\mathcal{B}$ est la base canonique. C'est la même preuve que pour le produit scalaire :

$$\det(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = f_1 g_2 - f_2 g_1,$$

et l'on dérive. $\square$

Exercice 1.2.6 (wronskien).

Soit $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues, soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ solutions de l'équation différentielle

$$y'' = ay' + by.$$

On pose $w(t) = \begin{vmatrix} f(t) & f'(t) \\ g(t) & g'(t) \end{vmatrix}$. Montrer que w est solution d'une équation différentielle d'ordre 1, que l'on déterminera.

c. Dans l'espace

Dans cette partie, on se place dans $\mathbb{R}^3$ (i.e. $n = 3$).

Proposition 1.2.7.

Soit $\mathbf{f}, \mathbf{g} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ deux fonctions vectorielles dérivables.

Alors, la fonction

$$\mathbf{f} \wedge \mathbf{g} : \begin{cases} I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto \mathbf{f}(t) \wedge \mathbf{g}(t) \end{cases}$$

est dérivable, et pour tout $t \in I$:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{f}(t) \wedge \mathbf{g}(t)) = \mathbf{f}'(t) \wedge \mathbf{g}(t) + \mathbf{f}(t) \wedge \mathbf{g}'(t).$$

Démonstration.

Comme précédemment. $\square$

Exercice 1.2.8.

Soit $\mathbf{f} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que

$$\forall t \in I, \mathbf{f}''(t) \in \text{Vect}(\mathbf{f}(t)).$$

1. Montrer que $t \mapsto \mathbf{f}(t) \wedge \mathbf{f}'(t)$ est constante.
2. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que la famille $(\mathbf{f}(a), \mathbf{f}'(a))$ est libre. Montrer que l'image de $\mathbf{f}$ est incluse dans un plan.

Proposition 1.2.9.

Soit $\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ trois fonctions vectorielles dérivables, soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^3$.

Alors, la fonction

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}) : \begin{cases} I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto \det_{\mathcal{B}}(\mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t), \mathbf{h}(t)) \end{cases}$$

est dérivable, et pour tout $t \in I$:

$$\frac{d}{dt}(\det_{\mathcal{B}}(\mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t), \mathbf{h}(t))) = \det_{\mathcal{B}}(\mathbf{f}'(t), \mathbf{g}(t), \mathbf{h}(t)) + \det_{\mathcal{B}}(\mathbf{f}(t), \mathbf{g}'(t), \mathbf{h}(t)) + \det_{\mathcal{B}}(\mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t), \mathbf{h}'(t)).$$

Démonstration.

Comme précédemment, ou bien en observant que, lorsque $\mathcal{B}$ est la base canonique et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique,

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \wedge \mathbf{h} \rangle$$

et en utilisant les résultats précédents. $\square$

1.3. Développement limité**Définition 1.3.1.**

Soit $\mathbf{f} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle, soit $k \in \mathbb{N}$ et $a \in I$. Notons $f_1, \dots, f_n$ les fonctions coordonnées de $\mathbf{f}$.

Alors, on note $\mathbf{f}(t) \underset{t \rightarrow a}{=} o((t-a)^k)$ si pour tout $1 \leq i \leq n$, $f_i(t) \underset{t \rightarrow a}{=} o((t-a)^k)$.

Remarque 1.3.2.

On peut donc écrire des développements limités vectoriels. En pratique, on les écrira toujours en 0, quitte à écrire $t = a + h$.

Exemple 1.3.3.

On sait que

$$e^t \underset{t \rightarrow 0}{=} 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

$$\ln(1+t) \underset{t \rightarrow 0}{=} t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

Si l'on pose $\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ \ln(1+t) \end{pmatrix}$, on a alors

$$\mathbf{f}(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + o(t^2).$$

Exercice 1.3.4.

Déterminer le développement limité à l'ordre 3 et en 0 de $t \mapsto \begin{pmatrix} e^t \\ \sin(t) \end{pmatrix}$.

Remarque 1.3.5 (unicité d'un DL).

Si l'on écrit, pour $a \in I$:

$$\mathbf{f}(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} \sum_{i=0}^k h^i \mathbf{v}_i + o(h^k),$$

où $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ sont des vecteurs (indépendants de t), alors ces vecteurs sont uniques.

Proposition 1.3.6 (Formule de Taylor-Young).

Soit $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$ et $a \in I$. Alors, on a

$$\mathbf{f}(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} \sum_{i=0}^k \frac{h^i}{i!} \mathbf{f}^{(i)}(a) + o(h^k).$$

Remarque 1.3.7.

Dans cette formule, bien garder en tête que le $o(h^k)$ est lui-même une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

En pratique, on utilise le plus souvent les formules des développements limités usuels coordonnée par coordonnée. Toutefois, par unicité d'un développement limité, cela peut permettre d'en déduire les valeurs des dérivées successives d'une fonction en un point (on verra dans la prochaine partie en quoi cela peut être utile), grâce à la formule de Taylor-Young.

Exemple 1.3.8.

En reprenant l'exemple précédent, on obtient que

$$\mathbf{f}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}'(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}''(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2. Courbes paramétrées

Dans toute cette partie, on considère un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, que l'on pourra au besoin identifier à $\mathbb{R}^2$, muni de sa base canonique.

On considère aussi un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et une fonction $\mathbf{f} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. On note x et y

ses deux fonctions coordonnées. Pour tout $t \in I$, on note $M(t)$ le point du plan de coordonnées $\mathbf{f}(t)$, i.e. vérifiant

$$\overrightarrow{OM(t)} = x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j},$$

ce que l'on peut écrire $M(t)|_{y(t)}^{x(t)}$ ou encore $M(t)|_{\mathbf{f}(t)}$.

Les résultats énoncés sont aussi valables dans l'espace, i.e. si $\mathbf{f} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$. On a alors notamment trois fonctions coordonnées x, y, z .

2.1. Introduction

Dans toute la suite, on supposera que les fonctions étudiées sont dérivables suffisamment de fois pour que les formules présentées aient un sens.

Définition 2.1.1 (voir la figure 2).

On appelle *arc paramétré* (ou *courbe paramétrée*) par $\mathbf{f}$ la partie Γ du plan constituée des points de coordonnées $\mathbf{f}(t)$ lorsque t parcourt I , i.e.

$$\Gamma = \left\{ M(t)|_{\mathbf{f}(t)} \mid t \in I \right\}.$$

Si l'on identifie ce plan à $\mathbb{R}^2$, on pourra noter directement

$$\Gamma = \{ \mathbf{f}(t) \mid t \in I \}.$$

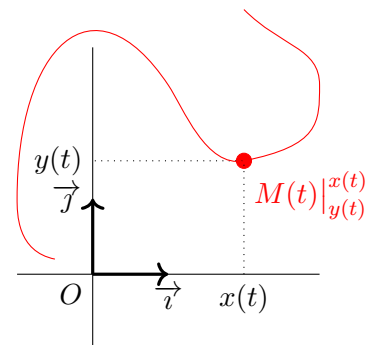


FIGURE 2 – Illustration d'un arc paramétré.

Remarque 2.1.2.

On trouve plusieurs notations pour introduire les arcs paramétrés, en voici quelques (sur le même exemple). On vous donnera parfois l'ensemble de définition (parfois non).

- ▷ Étudier l'arc paramétré défini par $(\cos^3(t), \sin^3(t))$.
- ▷ Étudier l'arc paramétré défini par

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos^3(t) \\ \sin^3(t) \end{pmatrix}.$$

▷ Étudier l'arc paramétré défini par

$$\gamma(t) = \cos^3(t) + i \sin^3(t).$$

▷ Étudier l'arc paramétré défini par $x(t) = \cos^3(t)$ et $y(t) = \sin^3(t)$.

Remarque 2.1.3.

L'arc paramétré par $\mathbf{f}$ est dit de classe $\mathcal{C}^k$ lorsque $\mathbf{f}$ est de classe $\mathcal{C}^k$.

Définition 2.1.4.

Soit $t \in I$. Le point $M(t)|_{\mathbf{f}(t)}$ est dit :

- ▷ *régulier* si $\mathbf{f}'(t) \neq 0$;
- ▷ *stationnaire* sinon.

L'étude des points stationnaires est un ingrédient fondamental du tracé d'arc paramétré. En effet, au voisinage d'un point régulier, le point courant possède un vecteur vitesse non nul et suit donc une trajectoire « lisse ». En revanche, en un point stationnaire, le vecteur vitesse s'annule et la trajectoire peut donc posséder des variations brutales.

Exemple 2.1.5.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique. La courbe de la fonction f correspond à la courbe de l'arc paramétré défini par

$$\mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

Si f est dérivable, on a alors pour tout $t \in I$:

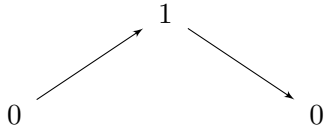
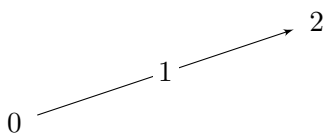
$$\mathbf{g}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, tous les points de cette courbe sont réguliers, et la tangente en cette courbe au point a est dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ f'(a) \end{pmatrix}$. Comme elle passe par le point de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix}$, on retrouve son équation : $y = f(a) + (x - a)f'(a)$.

Exercice 2.1.6.

Tracer l'allure des courbes paramétrées données par les tableaux suivants.

1.

t	-1	0	1	
$x(t)$				
$y(t)$				
$x'(t)$	+	0	-	
$y'(t)$	0	+	+	0

2.

t	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π		
$x(t)$	π	2π	3π	0		
$y(t)$	0	3π	2π	0		
$x'(t)$	0	+	+	0	-	
$y'(t)$		+	0	-	-	0

Définition 2.1.7 (voir la figure 3).

La courbe Γ paramétrée par $\mathbf{f}$ admet un point double s'il existe $t_1, t_2 \in I$ vérifiant $t_1 < t_2$ et $\mathbf{f}(t_1) = \mathbf{f}(t_2)$.

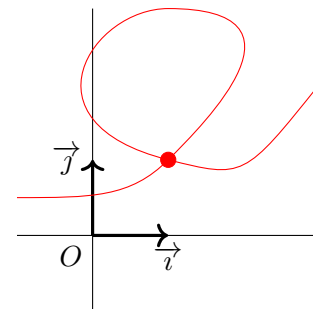


FIGURE 3 – Illustration d'un point double.

Exercice 2.1.8.

On considère la courbe paramétrée sur $]0, \pi[$ par $x(t) = \cos(2t)$ et $y(t) = \cos(3t)$.

Supposons qu'il existe $t, t' \in]0, \pi[$ vérifiant $t < t'$, $x(t) = x(t')$ et $y(t) = y(t')$.

1. En étudiant l'équation $x(t) = x(t')$, démontrer que $t' = \pi - t$.
2. En étudiant l'équation $y(t) = y(t')$, démontrer que $\cos(3t) = 0$.
3. En déduire que cette courbe admet un unique point double, et donner ses coordonnées.

2.2. Réduction de l'intervalle d'étude

On note dorénavant Γ la courbe paramétrée par $\mathbf{f}$, dont les coordonnées sont notées x et y .

Les symétries que l'on détecte sur les fonctions x et y (par périodicité, parité, imparité) se retrouvent sur la courbe.

Proposition 2.2.1.

Si les fonctions x et y sont T -périodiques, alors on peut réduire l'étude de Γ en étudiant $\mathbf{f}$ sur n'importe quelle partie de la forme $[a, a + T] \cap I$, c'est-à-dire que l'on restreint l'étude à un intervalle de longueur I .

Remarque 2.2.2.

La plupart du temps, on enchaînera avec une réduction de l'intervalle d'étude par parité. On préférera donc le plus souvent étudier la courbe sur l'intervalle de temps

$$\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \cap I.$$

Proposition 2.2.3.

Les informations de parité et d'imparité sur x et y donnent les symétries suivantes sur la courbe Γ (voir la table 1).

	y paire	y impaire
x paire	Identité	Sym. p/r Ox
x impaire	Sym. p/r Oy	Sym. p/r O

TABLE 1 – Symétries de la courbe paramétrée par $(x(t), y(t))$

Démonstration.

Supposons par exemple que x est paire et que y est impaire. Soit $t \in I$, considérons $M(t)|_{x(t)} \in \Gamma$. Alors, comme $y(-t) = -y(t)$ et $x(-t) = x(t)$, on a $M(-t)|_{x(t)}^{-y(t)} \in \Gamma$. On voit alors que $M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe Ox . Ainsi, Γ possède un axe de symétrie : Ox . $\square$

Exercice 2.2.4.

Compléter le tracé de la courbe **2)** de l'exercice 2.1.6 en supposant que x et y sont définies sur $[-\pi, \pi]$ et sont respectivement paire et impaire.

Exercice 2.2.5.

On suppose que $x, y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont 2π périodiques, et que x et y sont impaires. À quel intervalle peut-on réduire l'étude de la courbe paramétrée par x et y ?

Si l'on sait de plus que $x(\pi - t) = y(t)$ et $y(\pi - t) = x(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, quelle symétrie peut-on utiliser pour réduire davantage cet intervalle d'étude ?

2.3. Étude locale

Définition 2.3.1 (tangente).

Soit $a \in I$. La courbe Γ paramétrée par $\mathbf{f}$ admet une tangente en $M(a)|_{\mathbf{f}(a)}$ si la sécante $(M(a)M(a+h))$ admet une « position limite » lorsque h tend vers 0 (voir figure 4).

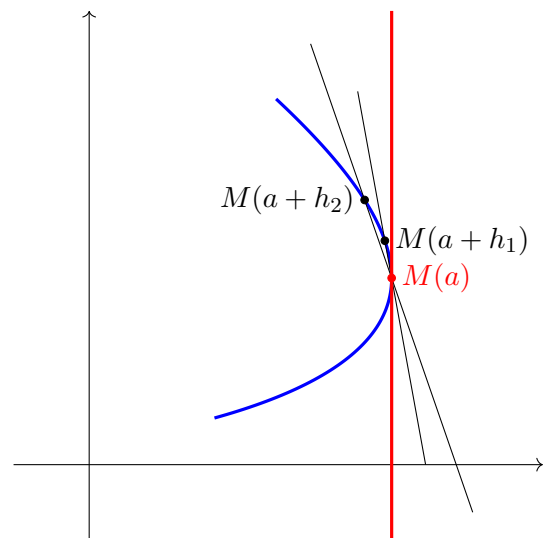


FIGURE 4 – Tangente à la courbe paramétrée par $x(t) = 4 \sin(t) - 2$ et $y(t) = t^2/2$.

Proposition 2.3.2.

S'il existe, la première dérivée non nulle de $\mathbf{f}$ en t_0 donne les coordonnées d'un vecteur directeur de la tangente à Γ en $M(t_0)$. Plus précisément, la tangente à la courbe Γ à l'instant t_0 admet comme vecteur directeur le vecteur de coordonnées $\mathbf{f}^{(p)}(t_0)$, où

$$p = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid \mathbf{f}^{(k)}(t_0) \neq \vec{0}\},$$

si un tel p existe.

Démonstration.

Au voisinage de 0, on peut écrire

$$\mathbf{f}(t_0 + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} \mathbf{f}(t_0) + \frac{h^p}{p!} \mathbf{f}^{(p)}(t_0) + o(h^p).$$

Notamment, on a sur les coordonnées x, y de $\mathbf{f}$:

$$\begin{cases} x(t_0 + h) - x(t_0) & \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{x^{(p)}(t_0)}{p!} h^p + o(h^p), \\ y(t_0 + h) - y(t_0) & \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{y^{(p)}(t_0)}{p!} h^p + o(h^p). \end{cases}$$

Une de ces deux dérivées successives est non nulle. Considérons, sans perte de généralité, que $x^{(p)}(t_0) \neq 0$. Alors, au voisinage de 0,

$$x(t_0 + h) - x(t_0) \sim \frac{x^{(p)}(t_0)}{p!} h^p,$$

et notamment $x(t_0 + h) - x(t_0)$ ne s'annule qu'en $h = 0$, au voisinage de 0.

Ainsi, si h est suffisamment petit (et non nul), $\mathbf{f}(t_0 + h) \neq \mathbf{f}(t_0)$.

La sécante à la courbe passant par les points de coordonnées $\mathbf{f}(t_0)$ et $\mathbf{f}(t_0 + h)$ est la droite :

- ▷ passant par $M(t_0)|_{\mathbf{f}(t_0)}$;
- ▷ dirigée par le vecteur de coordonnées $\mathbf{f}(t_0 + h) - \mathbf{f}(t_0)$.

Or,

$$\mathbf{f}(t_0 + h) - \mathbf{f}(t_0) \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{h^p}{p!} (\mathbf{f}^{(p)}(t_0) + o(1)).$$

Ainsi, un vecteur directeur de cette sécante est

$$\mathbf{u}_h = \frac{p! (\mathbf{f}(t_0 + h) - \mathbf{f}(t_0))}{h^p} \underset{h \rightarrow 0}{=} \mathbf{f}^{(p)}(t_0) + o(1).$$

Ceci admet une limite lorsque $h \rightarrow 0$:

$$\mathbf{u}_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} \mathbf{f}^{(p)}(t_0).$$

Ainsi, la droite passant par $M(t_0)|_{\mathbf{f}(t_0)}$ et dirigée par le vecteur de coordonnées $\mathbf{f}^{(p)}(t_0)$ est bien la droite « limite » des sécantes : c'est la tangente à la courbe paramétrée au point de coordonnées $M(t_0)|_{\mathbf{f}(t_0)}$. $\square$

Exercice 2.3.3.

Déterminer la tangente à l'instant $t = 0$ de la courbe définie par $x(t) = t^3$ et $y(t) = \sin^3(t)$.

Définition 2.3.4 (entiers fondamentaux).

Soit $t_0 \in I$. Supposons qu'il existe deux entiers $1 \leq p < q$ et des vecteurs $\mathbf{v}_p, \dots, \mathbf{v}_q$ tels que l'on ait le développement limité

$$\mathbf{f}(t_0 + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} \mathbf{f}(t_0) + h^p \mathbf{v}_p + \dots + h^q \mathbf{v}_q + o(h^q),$$

ainsi que les conditions suivantes :

- ▷ $\mathbf{v}_p \neq \vec{0}$,
- ▷ $\mathbf{v}_{p+1}, \dots, \mathbf{v}_{q-1}$ sont colinéaires à $\mathbf{v}_p$,
- ▷ $\mathbf{v}_q$ n'est pas colinéaire à $\mathbf{v}_p$.

Alors, ces entiers p et q sont appelés *entiers fondamentaux* de la courbe paramétrée par $\mathbf{f}$ au temps t_0 .

Remarque 2.3.5.

S'ils existent, les deux entiers fondamentaux de la courbe paramétrée par $\mathbf{f}$ au temps $t_0 \in I$ sont

$$p = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid \mathbf{f}^{(k)}(t_0) \neq 0\},$$

et

$$q = \min\{k > p \mid (\mathbf{f}^{(p)}(t_0), \mathbf{f}^{(k)}(t_0)) \text{ est libre}\}.$$

Les vecteurs $\mathbf{v}_p$ et $\mathbf{v}_q$ de la définition 2.3.4 sont alors proportionnels respectivement à $\mathbf{f}^{(p)}(t_0)$ et $\mathbf{f}^{(q)}(t_0)$. Notamment, le vecteur $\mathbf{v}_p$ dirige la tangente à la courbe paramétrée par $\mathbf{f}$ au point de coordonnées $\mathbf{f}(t_0)$.

Remarque 2.3.6 (cas pratique).

Le plus souvent, on sera dans le cas suivant

$$\mathbf{f}(t_0 + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} \mathbf{f}(t_0) + h^p \mathbf{v}_p + h^q \mathbf{v}_q + o(h^q).$$

Remarque 2.3.7.

Pour calculer ces deux entiers, on effectue le développement limité de $\mathbf{f}$ en t_0 (et donc de ses composantes x et y), jusqu'à obtenir deux termes vectoriels non colinéaires (et non nuls).

Remarque 2.3.8 (voir figure 5).

Les deux vecteurs $\mathbf{v}_p$ et $\mathbf{v}_q$ délimitent quatre quadrants du plan, à partir du point $M(t_0)|_{\mathbf{f}(t_0)}$.

Par exemple, les points du quadrant Q_1 sont situés « du même côté » de $M(t_0)$, à la fois par rapport à $\mathbf{v}_p$ et à $\mathbf{v}_q$, tandis que Q_4 correspondra aux points situés du même côté que $\mathbf{v}_q$, mais du côté opposé à $\mathbf{v}_p$.

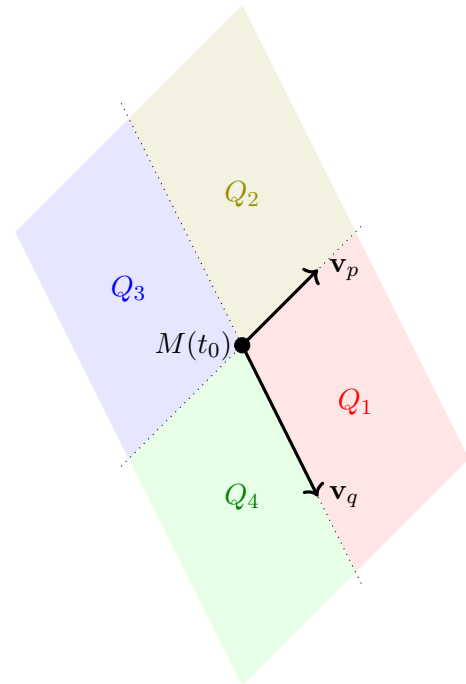


FIGURE 5 – Quadrants délimités par $\mathbf{v}_p$ et $\mathbf{v}_q$.

Proposition 2.3.9 (allure locale).

Si les deux entiers fondamentaux de la courbe paramétrée par $\mathbf{f}$ sont définis en t_0 , alors l'allure de la courbe au voisinage de t_0 correspond à l'un des quatre cas suivants.

- ▷ Si p est impair et q est pair, on a la situation de la figure 6 : la courbe admet un *point ordinaire* en $M(t_0)|_{\mathbf{f}(t_0)}$.
- ▷ Si p est impair et q est impair, on a la situation de la figure 7 : la courbe admet un *point d'inflexion* en $M(t_0)|_{\mathbf{f}(t_0)}$.
- ▷ Si p est pair et q est impair, on a la situation de la figure 8 : la courbe admet un *point de rebroussement de première espèce* en $M(t_0)|_{\mathbf{f}(t_0)}$.
- ▷ Si p est pair et q est pair, on a la situation de la figure 9 : la courbe admet un *point de rebroussement de deuxième espèce* en $M(t_0)|_{\mathbf{f}(t_0)}$.

Tout ceci est résumé dans la table 2. On peut aussi le résumer par la table 3.

Démonstration.

On écrit le développement limité de la manière suivante :

$$\mathbf{f}(t_0 + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} \mathbf{f}(t_0) + g(h)\mathbf{v}_p + h^q\mathbf{v}_q + o(h^q),$$

où g est une fonction scalaire dont les coordonnées sont polynomiales, vérifiant en 0 : $g(h) \sim h^p$.

Les applications de projection sur $\text{Vect}(\mathbf{v}_p)$ et $\text{Vect}(\mathbf{v}_q)$ (parallèlement à l'autre) étant linéaires, on peut écrire dans la base $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_p, \mathbf{v}_q)$:

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathbf{f}(t_0 + h) - \mathbf{f}(t_0)) = \begin{pmatrix} X(h) \\ Y(h) \end{pmatrix} \underset{h \rightarrow 0}{=} \begin{pmatrix} g(h) + o(h^q) \\ h^q + o(h^q) \end{pmatrix},$$

et l'on a les équivalents lorsque $h \rightarrow 0$:

$$X(h) \sim h^p \quad \text{et} \quad Y(h) \sim h^q.$$

Le tableau des signes de X et de Y au voisinage de 0 est alors donné par les parités de p et de q .

Par exemple, si p et q sont pairs, alors h^p et h^q sont tous les deux positifs, donc $X(h)$ et $Y(h)$ sont positifs au voisinage de 0, donc $g(h)\mathbf{v}_p$ et $h^q\mathbf{v}_q$ sont positivement colinéaires à $\mathbf{v}_p$ et $\mathbf{v}_q$, respectivement, ce qui indique que, localement, la courbe paramétrée reste dans le quadrant Q_1 autour de t_0 . $\square$

	q impair	q pair
p impair	Inflexion	Ordinaire
p pair	Rebr. de 1 ^{re} esp.	Rebr. de 2 ^e esp.

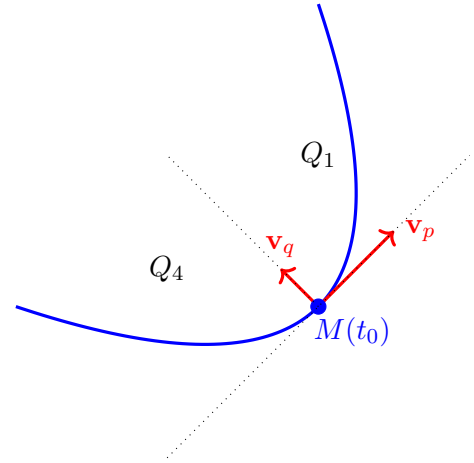
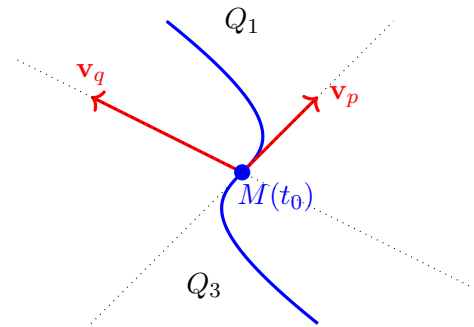
TABLE 2 – Différents types de points

Remarque 2.3.10 (points de rebroussement).

Il ne peut y avoir de point de rebroussement qu'en un point stationnaire.

Cas	Arrivée	Départ
Ordinaire	Q_4	Q_1
Inflexion	Q_3	Q_1
Rebr. de 1 ^{re} esp.	Q_2	Q_1
Rebr. de 2 ^e esp.	Q_1	Q_1

TABLE 3 – Quadrants d'arrivée et de départ de la courbe

FIGURE 6 – Point ordinaire : p est impair, q est pair.FIGURE 7 – Point d'inflexion : p est impair, q est impair.**Remarque 2.3.11** (point d'inflexion).

S'il y a un point d'inflexion en $M(t_0)|_{\mathbf{f}(t_0)}$ alors $\mathbf{f}'(t_0)$ et $\mathbf{f}''(t_0)$ sont colinéaires, donc

$$\det(\mathbf{f}'(t_0), \mathbf{f}''(t_0)) = 0.$$



Cette condition est nécessaire, mais PAS SUFFISANTE (considérer par exemple le cas $p = 2$ et $q = 3$).

Exercice 2.3.12.

Voici les exemples des figures 6, 7, 8 et 9. À chaque fois, on a pris $t_0 = 0$.

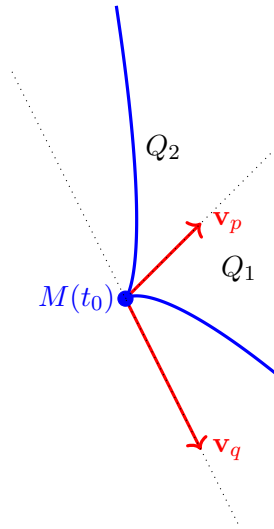


FIGURE 8 – Point de rebroussement de première espèce : p est pair, q est impair.

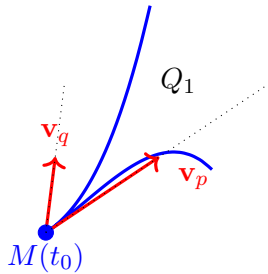


FIGURE 9 – Point de rebroussement de deuxième espèce : p est pair, q est pair.

1. $x(t) = 1 + t^2 + t^3$, $y(t) = t^2 - 2t^3$
2. $x(t) = t - 2t^3$, $y(t) = -1 + t + t^3$
3. $x(t) = -3\cos(t)$, $y(t) = t^2 + t^4 + t^5$
4. $x(t) = t - \frac{t^2}{2}$, $y(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2}$

Retrouver quelle courbe a servi pour quelle figure, donner alors les valeurs de p , de q , de $\mathbf{v}_p$ et de $\mathbf{v}_q$.

2.4. Longueur d'une courbe

Proposition 2.4.1.

Supposons que $\mathbf{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$. La longueur L de l'arc paramétré par $\mathbf{f}$ entre les instants $t_1 \in I$ et $t_2 \in I$ (où $t_1 < t_2$) est donnée par

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \|\mathbf{f}'(t)\| dt.$$

Remarque 2.4.2.

On calcule ici la longueur parcourue le long de l'arc

entre les temps t_1 et t_2 . Lorsque la fonction $\mathbf{f}$ est périodique, on peut potentiellement parcourir plusieurs fois le même arc : la longueur calculée n'est donc pas exactement celle de l'arc lui-même.

Par exemple, considérons le cercle unité, paramétré par $x(t) = \cos(t)$ et $y(t) = \sin(t)$.

Sa longueur entre les temps 0 et 2π est

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi,$$

ce qui donne bien le périmètre d'un cercle de rayon 1. Or, la longueur de cette courbe entre les temps 0 et 4π est

$$\int_0^{4\pi} \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} dt = \int_0^{4\pi} 1 dt = 4\pi \dots$$

Exercice 2.4.3 (hélice).

On considère la courbe paramétrée par $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = \sin(t)$ et $z(t) = t$. Calculer sa longueur entre les temps 0 et 10π .

2.5. Asymptotes

Dans cette partie, on considère que t_0 est une borne de I (éventuellement, $t_0 = +\infty$ ou $t_0 = -\infty$).

Définition 2.5.1 (asymptote verticale).

S'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$x(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} \ell \quad \text{et} \quad y(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} +\infty,$$

ou si

$$x(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} \ell \quad \text{et} \quad y(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} -\infty,$$

alors la courbe paramétrée admet une *asymptote verticale* d'équation $x = \ell$ (voir figure 10).

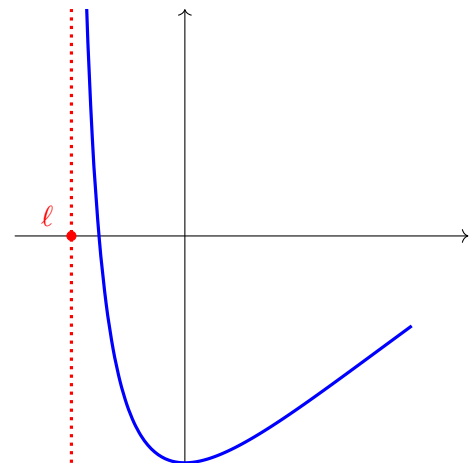


FIGURE 10 – Asymptote verticale.

Remarque 2.5.2 (cas plus rare).

On a aussi une asymptote verticale d'équation $x = \ell$ si

$$x(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{t < t_0} \ell, \quad y(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{t < t_0} -\infty, \quad \text{et} \quad y(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{t > t_0} +\infty,$$

et aussi si

$$x(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{t < t_0} \ell, \quad y(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{t < t_0} +\infty, \quad \text{et} \quad y(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{t > t_0} -\infty.$$

Définition 2.5.3 (asymptote horizontale).

S'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$x(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} +\infty \quad \text{et} \quad y(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} \ell,$$

ou si

$$x(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} -\infty \quad \text{et} \quad y(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} \ell,$$

alors la courbe paramétrée admet une *asymptote horizontale* d'équation $y = \ell$ (voir figure 11).

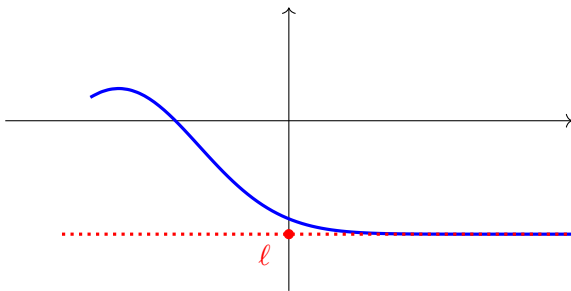


FIGURE 11 – Asymptote horizontale.

Remarque 2.5.4 (cas plus rare).

On a aussi une asymptote verticale d'équation $y = \ell$ si

$$x(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{t < t_0} -\infty, \quad x(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{t > t_0} +\infty, \quad \text{et} \quad y(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} \ell,$$

et aussi si

$$x(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{t < t_0} +\infty, \quad x(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{t > t_0} -\infty, \quad \text{et} \quad y(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} \ell.$$

2.6. Plan complet d'étude

On respectera systématiquement les étapes suivantes

1. Ensemble de définition de $\mathbf{f}$ et classe de régularité de $\mathbf{f}$.
2. Réduction de l'ensemble d'étude de $\mathbf{f}$ par périodicité, puis par parité ou imparité.

3. Étude des variations de x et de y , repérage des points stationnaires ($x'(t_0) = y'(t_0) = 0$), de certaines tangentes verticales ($x'(t_0) = 0$ et $y'(t_0) \neq 0$) ainsi qu'horizontales ($x'(t_0) \neq 0$ et $y'(t_0) = 0$) et des asymptotes verticales et horizontales.
4. Étude détaillée de chaque point stationnaire, en effectuant un DL à deux termes non colinéaires (de la forme $\mathbf{f}(t_0 + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} \mathbf{f}(t_0) + h^p \mathbf{v}_p + h^q \mathbf{v}_q + o(h^q)$). Si les deux termes obtenus sont colinéaires, on pousse le DL à un ordre supérieur.
5. Réaliser un premier tracé au brouillon, et repérer d'éventuels points doubles (*i.e.* un point où $\mathbf{f}(t_1) = \mathbf{f}(t_2)$, avec $t_1 < t_2$), voire des points d'inflexion. Pour chacun de ces points, déterminer ses coordonnées et un vecteur tangent à la courbe.
6. Réaliser le tracé définitif, en plaçant attentivement chaque point étudié, puis chaque tangente, puis en traçant harmonieusement la courbe. Compléter le tracé avec les symétries de la première question.

2.7. Exemples

Voici deux exemples sur lesquels nous pourrions travailler :

1. l'astroïde : $x(t) = \cos^3(t)$ et $y(t) = \sin^3(t)$;
2. la trisectrice de MacLaurin : $x(t) = \frac{3 - t^2}{1 + t^2}$ et $y(t) = tx(t)$.

2.8. Tracé informatique

Dans l'optique du second oral de mathématiques à Centrale, voici un morceau de code permettant de tracer une courbe paramétrée (ici : l'astroïde).

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 t_vec = np.linspace(0, 2*np.pi, num
   ↪ =100)
5 x_vec = np.cos(t_vec)**3
6 y_vec = np.sin(t_vec)**3
7
8 plt.clf()
9 plt.plot(x_vec, y_vec)
10 plt.grid()
11 plt.axis('equal')
12
13 plt.show()
```