

# XIII Séries de Fourier

Dans tout le chapitre,  $a$  et  $b$  sont deux réels vérifiant  $a < b$ ,  $T$  désigne un réel strictement positif, et l'on pose  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ .

## 1 L'espace des fonctions continues par morceaux.

### 1.1 Définition

**Définition 1.1.1** (fonction continue par morceaux sur un segment).

Une fonction  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est dite *continue par morceaux* s'il existe des réels

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$$

tels que pour tout  $0 \leq i < n$ , la restriction de  $f$  à  $]a_i, a_{i+1}[$  :

- ▷ est continue sur  $]a_i, a_{i+1}[$  ;
- ▷ admet des limites finies à droite et à gauche en  $a_i$  et en  $a_{i+1}$ , respectivement.

La famille de réels  $a = a_0 < \dots < a_n = b$  est appelée *subdivision de  $[a, b]$  adaptée à la fonction  $f$* .

**Remarque 1.1.2** (voir figure 1).

Cela signifie que l'on peut découper  $[a, b]$  en un nombre fini de segments  $[a_i, a_{i+1}]$  tels que, sur chaque  $]a_i, a_{i+1}[$ ,  $f$  (plus formellement,  $f|_{]a_i, a_{i+1}[}$ ) se prolonge par continuité sur  $[a_i, a_{i+1}]$  pour chaque entier  $i$ .

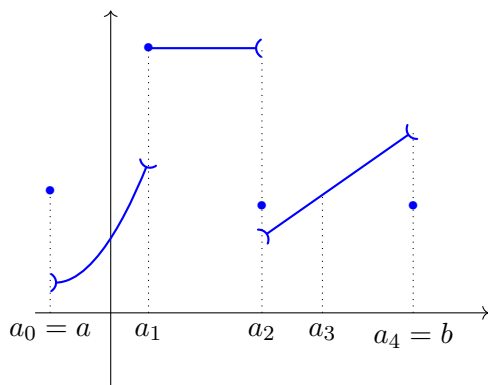


FIGURE 1 – Illustration de la définition d'une fonction continue par morceaux.

**Exemple 1.1.3.**

Une fonction créneau, une fonction en dents de scie, etc. sont continues par morceaux. Par contraste, une

fonction comme la fonction tangente (prolongée de manière quelconque là où elle n'est pas définie) n'est pas continue par morceaux sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , car on ne peut pas la prolonger par continuité en 0 et en  $\frac{\pi}{2}$ .

**Définition 1.1.4** (fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux sur un segment).

Une fonction  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est dite *de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux* s'il existe des réels

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$$

tels que pour tout  $0 \leq i < n$ ,

- ▷  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]a_i, a_{i+1}[$  ;
- ▷  $f$  admet des limites finies à droite et à gauche en  $a_i$  et en  $a_{i+1}$  ;
- ▷  $f'$  admet des limites finies à droite et à gauche en  $a_i$  et en  $a_{i+1}$ .

**Remarque 1.1.5.**

Cela signifie que l'on peut découper  $[a, b]$  en un nombre fini de segments  $[a_i, a_{i+1}]$  tels que, sur chaque  $]a_i, a_{i+1}[$ ,  $f$  se prolonge en une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a_i, a_{i+1}]$  pour chaque entier  $i$ .

**Exemple 1.1.6.**

La fonction de la figure 1 est  $\mathcal{C}^1$  par morceaux.

La fonction  $f$  définie sur  $[0, 1]$  par

- ▷  $f(t) = \sqrt{t}$  si  $0 < t \leq 1$  ;
- ▷  $f(0) = 42$

est continue par morceaux (il y a un seul morceau !), mais pas  $\mathcal{C}^1$  par morceaux.

**Définition 1.1.7.**

Une fonction  $f$   $T$ -périodique sur  $\mathbb{R}$  est dite *continue par morceaux* (respectivement de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux) sur  $\mathbb{R}$  si  $f$  est continue par morceaux (respectivement de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux) sur un segment de longueur  $T$ .

**Proposition 1.1.8.**

Si  $f, g$  sont  $T$ -périodiques et continues par morceaux (respectivement  $\mathcal{C}^1$  par morceaux), et si  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , alors  $\lambda f + \mu g$  est  $T$ -périodique et continue par morceaux (respectivement  $\mathcal{C}^1$  par morceaux).

**Démonstration.**

Admis

□

**Remarque 1.1.9.**

Cela signifie que l'ensemble des fonctions  $T$ -périodiques et continues par morceaux (respectivement  $\mathcal{C}^1$  par morceaux) est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions réelles.

**Remarque 1.1.10.**

Bien entendu :

- ▷ une fonction continue est continue par morceaux ;
- ▷ une fonction  $\mathcal{C}^1$  est  $\mathcal{C}^1$  par morceaux ;
- ▷ une fonction  $\mathcal{C}^1$  par morceaux est continue par morceaux.

## 1.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

**Définition 1.2.1.**

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue par morceaux, soit  $a = a_0 < \dots < a_n = b$  une subdivision adaptée à la fonction  $f$ . On définit alors

$$\int_a^b f(t) dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t) dt,$$

l'intégrale  $\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t) dt$  s'entendant comme étant celle du prolongement par continuité de  $f$  au segment  $[a_i, a_{i+1}]$ .

**Remarque 1.2.2** (voir figure 2).

On admet que cette définition ne dépend pas du choix des points de la subdivision  $a_0, \dots, a_n$ .

Cette intégrale s'interprète alors toujours comme étant l'aire (algébrique) sous la courbe de  $f$ . On pourra remarquer qu'elle ne dépend pas des valeurs  $f(a_0), \dots, f(a_n)$ .

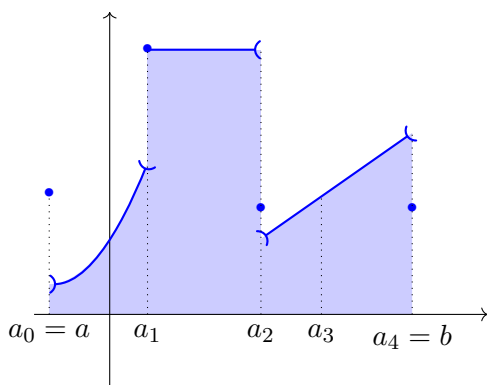


FIGURE 2 – Illustration de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux.

**Exercice 1.2.3.**

Calculer  $\int_0^5 \lfloor t \rfloor dt$ .

**Exercice 1.2.4.**

On définit la fonction  $H$  (de Heaviside) comme valant 0 sur  $\mathbb{R}_-^*$  et 1 sur  $\mathbb{R}_+$ . Pour  $x \in \mathbb{R}$ , calculer  $\int_0^x H(t) dt$ .

Les propriétés principales de l'intégrale sont préservées pour les fonctions continues par morceaux, à l'exception de deux propriétés (importantes !).

**Proposition 1.2.5** (Linéarité).

Soit  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continues par morceaux, soit  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , alors

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt.$$

**Démonstration.**

Admis □

**Proposition 1.2.6** (Positivité).

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue par morceaux et positive (i.e.  $\forall t \in [a, b], f(t) \geq 0$ ), alors

$$\int_a^b f(t) dt \geq 0.$$

**Démonstration.**

Admis □

**Corollaire 1.2.7** (Croissance).

Soit  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continues par morceaux, vérifiant  $f \leq g$  (i.e.  $\forall t \in [a, b], f(t) \leq g(t)$ ), alors

$$\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt.$$

**Démonstration.**

Il suffit d'appliquer la propriété de positivité à  $g - f$ , puis d'utiliser la propriété de linéarité. □

**Proposition 1.2.8** (Intégrale sur une période).

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $T$ -périodique et continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$ . Alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\int_0^T f(t) dt = \int_x^{x+T} f(t) dt.$$

**Démonstration.**

Admis pour les fonctions continues par morceaux, laissé en exercice dans le cas des fonctions continues.  $\square$

**Remarque 1.2.9.**

On peut donc bien parler *d'intégrale sur une période* pour une telle fonction  $f$ .

Ce dernier résultat s'exprime différemment des résultats connus précédemment.

**Proposition 1.2.10.**

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  positive, continue par morceaux, et vérifiant  $\int_a^b f(t) dt = 0$ .

Alors,  $f$  est nulle sur  $[a, b]$ , sauf peut-être en un nombre fini de points.

**Démonstration.**

Admis  $\square$

**Exemple 1.2.11.**

Si  $f$  est la fonction nulle sur  $]0, 1]$  et vérifiant  $f(0) = 42$ , alors  $f$  est continue par morceaux sur  $[0, 1]$ ,  $f$  est positive sur  $[0, 1]$ ,  $\int_0^1 f(t) dt = 0$ , mais  $f$  n'est pas nulle partout sur  $[0, 1]$ .

## 2 Un espace préhilbertien

**Théorème 2.0.1.**

On pose

$$\mathcal{C}_T = \{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continue et } T\text{-périodique} \},$$

Et, pour  $f, g \in \mathcal{C}_T$ , on définit

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)g(t) dt.$$

Alors,  $(\mathcal{C}_T(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$  est un espace préhilbertien.

**Démonstration.**  $\triangleright \mathcal{C}_T(\mathbb{R})$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  (laissé en exercice).

- $\triangleright \langle \cdot, \cdot \rangle$  définit clairement une forme bilinéaire symétrique sur  $\mathcal{C}_T(\mathbb{R})$ .
- $\triangleright$  Si  $f \in \mathcal{C}_T(\mathbb{R})$ , on a

$$\langle f, f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt \geq 0,$$

par positivité de l'intégrale, car la fonction  $f^2$  est positive.

- $\triangleright$  Si  $f \in \mathcal{C}_T(\mathbb{R})$  vérifie  $\langle f, f \rangle = 0$ , alors

$$\int_0^T f^2(t) dt = 0.$$

Comme  $f^2$  est continue et positive et  $0 < T$ , alors  $f$  est nulle sur l'intervalle  $[0, T]$ , donc nulle sur  $\mathbb{R}$  par périodicité.  $\square$

**Théorème 2.0.2.**

Notons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , les fonctions

$$\begin{aligned} c_n &: t \mapsto \cos(n\omega t), \\ s_n &: t \mapsto \sin(n\omega t). \end{aligned}$$

Alors, la famille  $(c_0, c_1, s_1, \dots, c_n, s_n, \dots)$  est une famille orthogonale de  $\mathcal{C}_T(\mathbb{R})$ .

**Démonstration.**

Il s'agit de vérifier que tous les produits scalaires  $\langle c_n, c_p \rangle$  (si  $n \neq p$ ),  $\langle c_n, s_p \rangle$  et  $\langle s_n, s_p \rangle$  (si  $n \neq p$ ) sont nuls.

Soit  $n, p \in \mathbb{N}$ .

Si  $n \neq p$ , alors

$$\begin{aligned} \langle c_n, c_p \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \cos(n\omega t) \cos(p\omega t) dt \\ &= \frac{1}{2T} \int_0^T \cos((n+p)\omega t) + \cos((n-p)\omega t) dt \\ &= \frac{1}{2T} \left[ \frac{\sin((n+p)\omega t)}{(n+p)\omega} + \frac{\sin((n-p)\omega t)}{(n-p)\omega} \right]_0^T \\ &= 0. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \langle s_n, s_p \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \sin(n\omega t) \sin(p\omega t) dt \\ &= \frac{1}{2T} \int_0^T \cos((n-p)\omega t) - \cos((n+p)\omega t) dt \\ &= \frac{1}{2T} \left[ \frac{\sin((n-p)\omega t)}{(n-p)\omega} - \frac{\sin((n+p)\omega t)}{(n+p)\omega} \right]_0^T \\ &= 0 \end{aligned}$$

Si  $n = p$ , alors

$$\begin{aligned} \langle c_n, s_n \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \cos(n\omega t) \sin(n\omega t) dt \\ &= \frac{1}{2T} \int_0^T \sin(2n\omega t) dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Si  $n \neq p$ , alors

$$\begin{aligned} \langle c_n, s_p \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \cos(n\omega t) \sin(p\omega t) dt \\ &= \frac{1}{2T} \int_0^T \sin((n+p)\omega t) - \sin((n-p)\omega t) dt \\ &= \frac{1}{2T} \left[ \frac{\cos((n-p)\omega t)}{(n-p)\omega} - \frac{\cos((n+p)\omega t)}{(n+p)\omega} \right]_0^T \\ &= 0. \end{aligned}$$

$\square$

**Remarque 2.0.3.**

Cette famille n'est pas orthonormale car, bien que l'on ait

$$\|c_0\|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \cos(0\omega t) \cos(0\omega t) dt = 1,$$

on a, pour tout  $n > 0$ ,

$$\begin{aligned}\|c_n\|^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T \cos(n\omega t) \cos(n\omega t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(n\omega t) dt \\ &= \frac{1}{2T} \int_0^T (1 + \cos(2n\omega t)) dt \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\|s_n\|^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T \sin(n\omega t) \sin(n\omega t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(n\omega t) dt \\ &= \frac{1}{2T} \int_0^T (1 - \cos(2n\omega t)) dt \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

### 3 Coefficients de Fourier

On rappelle que  $T > 0$  et que  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ .

Dans tout ce chapitre,  $I$  désigne un intervalle de longueur  $T$  (sur lequel on retrouve un motif d'une fonction  $T$ -périodique). Si  $I = [a, a + T]$ , on note alors

$$\int_I f(t) dt = \int_a^{a+T} f(t) dt.$$

Pour une fonction  $f$   $T$ -périodique, cela ne dépend pas du choix de  $a$ .

#### Définition 3.0.1 (coefficients de Fourier).

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $T$ -périodique et continue par morceaux. On appelle *coefficients de Fourier* de  $f$  les nombres :

$$\begin{aligned}a_0(f) &= \frac{1}{T} \int_I f(t) dt, \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, a_n(f) &= \frac{2}{T} \int_I f(t) \cos(n\omega t) dt, \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(f) &= \frac{2}{T} \int_I f(t) \sin(n\omega t) dt,\end{aligned}$$

où  $I$  est un intervalle quelconque de longueur  $T$ .

#### Exercice 3.0.2.

On considère la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , impaire et  $2\pi$  périodique, valant 1 sur  $]0, \pi[$ .

1. Tracer l'allure du graphe de cette fonction.
2. Calculer ses coefficients de Fourier.

#### Exercice 3.0.3.

Calculer les coefficients de Fourier de la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  qui est  $T$ -périodique et telle que, pour tout  $t \in [0, T[$ ,  $f(t) = t$ .

#### Remarque 3.0.4.

$a_0(f)$  est donc la valeur moyenne de  $f$  (sur une période).

#### Remarque 3.0.5.

Comme  $t \mapsto f(t) \cos(n\omega t)$  et  $t \mapsto f(t) \sin(n\omega t)$  sont  $T$ -périodiques, on a, pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned}a_0(f) &= \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) dt; \\ \forall n \in \mathbb{N}^* a_n(f) &= \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \cos(n\omega t) dt; \\ \forall n \in \mathbb{N}^* b_n(f) &= \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \sin(n\omega t) dt.\end{aligned}$$

Notamment, pour  $\alpha = 0$  et pour  $\alpha = -\frac{T}{2}$ , pour tout  $n \geq 1$  :

$$\begin{aligned}a_0(f) &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt, \\ a_n(f) &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt \\ &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt, \\ b_n(f) &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt \\ &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt.\end{aligned}$$

#### Définition 3.0.6 (somme partielle de Fourier).

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $T$ -périodique et continue par morceaux, soit  $N \in \mathbb{N}$ . On appelle *somme partielle d'ordre  $N$  de la série de Fourier associée à  $f$*  la fonction

$$S_N : t \mapsto a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)).$$

#### Remarque 3.0.7 (interprétation géométrique).

Sur l'espace des fonctions continues et périodiques, nous savons que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire. D'après le théorème 2.0.2, en notant  $c_n : x \mapsto \cos(n\omega x)$  et  $s_n : x \mapsto \sin(n\omega x)$ , ainsi que

$$F_N = \text{Vect}(c_0, \dots, c_N, s_1, \dots, s_N),$$

alors  $(c_0, \dots, c_N, s_1, \dots, s_N)$  est une base orthogonale de  $F_N$ .

Si  $f$  est continue,  $S_N(f)$  est le projeté orthogonal de  $f$  sur  $F_N$ , et  $a_0, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N$  sont les coordonnées de cette projection dans la base  $(c_0, \dots, c_N, s_1, \dots, s_N)$ .

### Proposition 3.0.8.

Si  $f$  est paire, alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $b_n(f) = 0$ .

Si  $f$  est impaire, alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n(f) = 0$ .

#### Démonstration.

Si  $f$  est paire, alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $t \mapsto f(t) \sin(n\omega t)$  est impaire, donc  $\int_I f(t) \sin(n\omega t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt = 0$ .

Si  $f$  est impaire, alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $t \mapsto f(t) \cos(n\omega t)$  est impaire, donc  $\int_I f(t) \cos(n\omega t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt = 0$ .

On peut retrouver les deux résultats utilisés en posant le changement de variable  $u = -t$ .  $\square$

### Remarque 3.0.9.

Si  $f$  est paire, alors, pour tout  $n \geq 1$ , la fonction  $t \mapsto f(t) \cos(n\omega t)$  est également paire ; on peut alors écrire

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{2}{T} \int_I f(t) \cos(n\omega t) dt \\ &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt \\ &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt. \end{aligned}$$

### Remarque 3.0.10.

On peut calculer en une seule intégrale les coefficients  $a_n(f)$  et  $b_n(f)$  en remarquant que, si  $n \geq 1$ ,

$$a_n(f) + ib_n(f) = \frac{2}{T} \int_I f(t) e^{in\omega t} dt.$$

## 4 Série de Fourier

### Définition 4.0.1.

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue par morceaux et  $T$ -périodique. On appelle *série de Fourier* de  $f$  la série de fonctions

$$t \mapsto a_0(f) + \sum_{n \geq 1} (a_n(f) \cos(n\omega t) + b_n(f) \sin(n\omega t)).$$

### Remarque 4.0.2.

On n'a aucune information a priori sur la convergence de cette série.

### Théorème 4.0.3 (Formule de Parseval).

Si  $f$  est continue par morceaux et  $T$ -périodique, alors la série  $\sum (a_n^2(f) + b_n^2(f))$  converge, et

$$\frac{1}{T} \int_I f^2(t) dt = a_0^2(f) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2(f) + b_n^2(f)),$$

où  $I$  est un intervalle de longueur  $T$ .

#### Démonstration.

Admis.  $\square$

### Remarque 4.0.4.

Par la formule de Parseval, si  $f$  est continue par morceaux, la série  $\sum (a_n^2(f) + b_n^2(f))$  converge, donc, comme  $0 \leq a_n^2(f) \leq a_n^2(f) + b_n^2(f)$ , les séries  $\sum a_n^2(f)$  et  $\sum b_n^2(f)$  convergent. On en déduit en particulier que  $a_n(f)$  et  $b_n(f)$  tendent vers 0 pour  $n \rightarrow +\infty$ .

### Remarque 4.0.5.

Si  $f$  est  $T$ -périodique et continue, alors pour tout  $p \geq 1$ , par le théorème 2.0.2 et par l'écriture de la norme d'un vecteur dans une base orthogonale,

$$\begin{aligned} \|S_N(f)\|^2 &= a_0^2(f) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (a_n^2(f) + b_n^2(f)) \\ &\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \|f\|^2, \end{aligned}$$

donc par orthogonalité de  $S_N(f)$  et de  $f - S_N(f)$ ,

$$\|f - S_N(f)\|^2 = \|f\|^2 - \|S_N(f)\|^2 \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0,$$

d'après la formule de Parseval.

### Exercice 4.0.6.

On reprend l'exercice 3.0.2.

Appliquer la formule de Parseval pour obtenir la valeur de  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ .

En déduire la valeur de  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ .

Le théorème de Parseval peut souvent s'interpréter en terme d'énergie : l'énergie d'un signal est la somme des énergies de ses harmoniques. Il ne renseigne toutefois pas sur la nature de la série de Fourier, qui est donnée par le théorème suivant.

### Définition 4.0.7.

Si  $f$  est une fonction continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$  et  $t \in \mathbb{R}$ , on note  $f(t^+)$  (resp.  $f(t^-)$ ) la limite à droite (resp. à gauche) de  $f(x)$  lorsque  $x \rightarrow t$ .

On appelle *régularisée* de  $f$  la fonction

$$\tilde{f} : t \mapsto \frac{1}{2} (f(t^+) + f(t^-)).$$

**Exemple 4.0.8.**

On considère la fonction créneau  $c$  2-périodique, valant 0 sur  $[0, 1[$  et 1 sur  $[1, 2[$ . Sa régularisée  $\tilde{c}$  est montrée dans la figure 3.

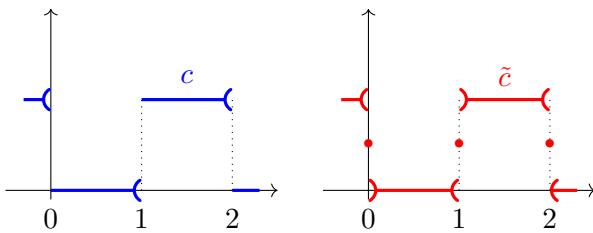


FIGURE 3 – Illustration de la régularisée d'une fonction.

**Remarque 4.0.9.**

En particulier, si  $f$  est continue en un point  $t$ , on  $f(t^+) = f(t^-) = f(t)$  donc  $f(t) = \tilde{f}(t)$ .

Notamment, si  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , alors  $f = \tilde{f}$ .

**Remarque 4.0.10.**

Si  $f$  est une fonction continue par morceaux et  $T$ -périodique, alors sa régularisée est encore continue par morceaux et  $T$ -périodique.

**Théorème 4.0.11** (Théorème de Dirichlet).

Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction  $T$ -périodique et  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, notons  $\tilde{f}$  sa régularisée. Alors, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , la série de Fourier associée à  $f$  converge en  $t$  et l'on a

$$a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f) \cos(n\omega t) + b_n(f) \sin(n\omega t)) = \tilde{f}(t).$$

**Démonstration.**

Admis. □

**Exemple 4.0.12** (voir figure 4).

On observe bien sur la fonction créneau de l'exemple 4.0.8 la convergence des sommes partielles de la série de Fourier vers la régularisée de  $c$ .

**Exercice 4.0.13.**

On reprend l'exercice 3.0.2.

Appliquer le théorème de Dirichlet, en un point bien choisi, pour obtenir la valeur de  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ .

**Remarque 4.0.14.**

Le théorème de Dirichlet donne une réponse partielle à la deuxième question de convergence de la deuxième partie : si  $f$  est continue et  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, alors, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $S_N(f)(t) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} f(t)$ .

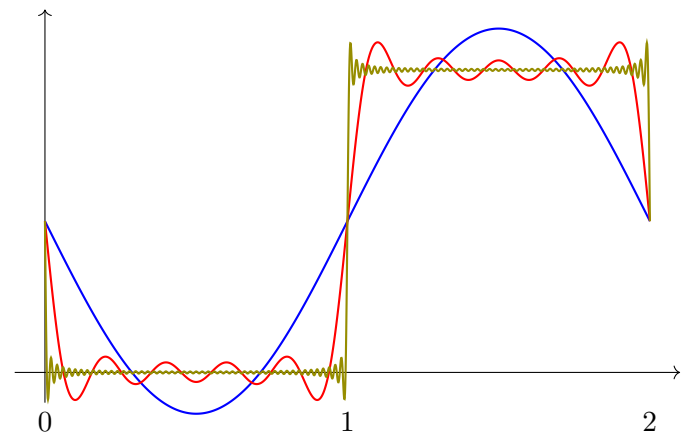


FIGURE 4 – Illustration du théorème de Dirichlet pour un créneau ( $N \in \{1, 10, 100\}$ ).

**Exercice 4.0.15.**

Soit  $f$  la fonction  $2\pi$ -périodique définie pour  $x \in [0, 2\pi[$  par  $f(x) = x^2$ . Déterminer la série de Fourier de  $f$ , appliquer le théorème de Dirichlet en 0 et celui de Parseval, en déduire la valeur des séries de terme général  $\frac{1}{n^2}$  et  $\frac{1}{n^4}$ .

## 5 Calcul avec Python

Les coefficients de Fourier d'une fonction se calculent aisément, que ce soit avec la fonction `quad` de `scipy.integrate` (ce que nous montrons ici), ou avec la méthode des rectangles. On montre cela sur l'exemple de la fonction créneau précédente.

On commence par importer les bibliothèques nécessaires, puis l'on calcule les coefficients de Fourier, que l'on affecte à des listes nommées `a` et `b`. On utilise ici la fonction `quad` pour cela, mais on peut aussi utiliser les expressions des coefficients trouvées (par calcul).

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3 from scipy.integrate import quad
4
5 def c(t):
6     return (t//1)%2
7
8 T=2
9 omega = 2*np.pi / T
10 N = 100
11
12 a = [quad(c, 0, T)[0]/T]
13 b = [0]
14
15 for n in range(1, N+1):
16     def cosn(t):
```

```

17         return c(t)*np.cos(n*omega*
18             ↪ t)
19     def sinn(t):
20         return c(t)*np.sin(n*omega*
21             ↪ t)
22     a.append(2*quad(cosn,0,T)[0]/T)
23     b.append(2*quad(sinn,0,T)[0]/T)

```

Ainsi, le flottant  $a[k]$  a pour valeur  $a_k$  (*idem* pour  $b$ ).

On peut ensuite écrire une fonction calculant les valeurs de

$$S_N(c)(t) = a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)).$$

```

22 def S(N,a,b,t):

```

```

23     s = a[0]
24     for n in range(1,N+1):
25         s += a[n]*np.cos(n*omega*t)
26         s += b[n]*np.sin(n*omega*t)
27     return s

```

Il suffit ensuite de tracer tout cela.

```

28 x = np.linspace(0,T,num=1000)
29 plt.clf()
30 plt.plot(x,c(x),'b-')
31 plt.plot(x,S(1,a,b,x),'r-.')
32 plt.plot(x,S(10,a,b,x),'g:')
33 plt.plot(x,S(100,a,b,x),'m--')
34 plt.show()

```