

XI Espaces préhilbertiens et euclidiens

Dans tout le chapitre, E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

1 Définitions

Définition 1.0.1.

On appelle *forme bilinéaire* sur E toute application $\varphi: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x_0, y_0 \in E$, les applications

$$\triangleright \varphi(\cdot, y_0) : x \mapsto \varphi(x, y_0)$$

$$\triangleright \varphi(x_0, \cdot) : y \mapsto \varphi(x_0, y)$$

sont des formes linéaires sur E , i.e. si φ est linéaire par rapport à chaque de ses variables, l'autre étant considérée comme étant fixée.

Remarque 1.0.2.

Si $\varphi: E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est bilinéaire, alors elle vérifie la formule de double développement : pour tout $x_1, x_2, y_1, y_2 \in E$ et pour tout $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2) &= \lambda_1 \mu_1 \varphi(x_1, y_1) \\ &+ \lambda_1 \mu_2 \varphi(x_1, y_2) + \lambda_2 \mu_1 \varphi(x_2, y_1) \\ &+ \lambda_2 \mu_2 \varphi(x_2, y_2). \end{aligned}$$

Remarque 1.0.3.

Si φ est une forme bilinéaire sur E , alors pour tout $x, y \in E$, on a $\varphi(x, 0_E) = \varphi(0_E, y) = 0$.

Exemple 1.0.4.

Le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$) est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$).

La fonction $(x, y) \mapsto x + y$ n'est pas une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}$, car si $y = 1$ l'application $x \mapsto x + 1$ n'est pas linéaire.

Exercice 1.0.5.

Déterminer si les applications suivantes sont bilinéaires ou non. On prend $E = \mathbb{R}[X]$.

1. $\varphi: (P(X), Q(X)) \mapsto P(1)Q' + 3Q(2)P$
2. $\psi: (P(X), Q(X)) \mapsto P(X+1) + Q'$
3. $\chi: (P(X), Q(X)) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t) dt$

Définition 1.0.6.

Une forme bilinéaire φ sur E est dite :

$\triangleright$ *symétrique* lorsque, pour tout $x, y \in E$, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$;

$\triangleright$ *positive* lorsque, pour tout $x \in E$, $\varphi(x, x) \geq 0$;

$\triangleright$ *définie* lorsque, pour tout $x \in E$, si $\varphi(x, x) = 0$ alors $x = 0$.

Exercice 1.0.7.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\varphi(P, Q) = P(a) \times Q(b)$. Vérifier que φ est une forme bilinéaire. Est-elle symétrique ? Positive ? Définie ?

Définition 1.0.8.

Un *produit scalaire* sur E est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E .

On appelle *espace préhilbertien* tout $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire, et *espace euclidien* un espace préhilbertien de dimension finie.

Remarque 1.0.9.

La notation $\varphi(x, y)$ n'est pas pratique pour noter un produit scalaire. On utilisera plutôt une ou l'autre des notations suivantes : $\langle x, y \rangle$, $(x | y)$, $x \cdot y$. Bien entendu, il en existe bien d'autres.

Les exemples suivants sont fondamentaux, et à retenir.

Proposition 1.0.10 (structure euclidienne usuelle de $\mathbb{R}^n$).

Sur $\mathbb{R}^n$, si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et si $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, alors

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

définit un produit scalaire, appelé *produit scalaire canonique* sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1.0.11.

Montrer que si $a, b \in \mathbb{R}$ vérifient $a < b$, alors on définit sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ un produit scalaire par

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt.$$

Exercice 1.0.12.

Montrer que pour $a < b$ deux réels, $\langle P, Q \rangle = \int_a^b P(t)Q(t) dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 1.0.13.

Avec $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ écrits sous forme développée réduite $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k$, montrer que tous les exemples suivants définissent bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_k,$$

$$(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)e^{-t} dt,$$

$$P \cdot Q = P(0)Q(0) + \int_{-1}^1 P'(t)Q'(t) dt$$

À chaque fois, cela munit-il aussi $\mathbb{R}_p[X]$ d'une structure euclidienne, pour chaque $p \in \mathbb{N}$?

2 Géométrie associée à un produit scalaire

Dans toute cette partie, E est un espace vectoriel réel, muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Définition 2.0.1 (norme associée).

Pour $x \in E$, on définit le scalaire

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

La fonction $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ est appelée *norme associée au produit scalaire* $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

On appelle *vecteur unitaire* tout vecteur de norme égale à 1.

Exercice 2.0.2.

On considère sur $\mathbb{R}[X]$ la norme associée au produit scalaire

$$\langle P(X), Q(X) \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt.$$

Calculer les normes des vecteurs 1 et X .

Remarque 2.0.3.

La positivité du produit scalaire assure la bonne définition de la norme ci-dessus.

Remarque 2.0.4.

Si l'on travaille avec plusieurs produits scalaires sur un même espace, on devra alors adopter une notation différente pour chaque norme associée à chaque produit scalaire (par exemple : $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ etc.).

Remarque 2.0.5 (développement du carré de la norme d'une somme).

Si $x, y \in E$, on a (formule très utile, à savoir retrouver par double développement) :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2.$$

Exercice 2.0.6.

Proposer et démontrer une formule pour

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2.$$

Théorème 2.0.7 (Inégalité de Cauchy-Schwarz).

Pour tout $x, y \in E$,

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|,$$

avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Démonstration.

Si $y = 0_E$, c'est évident. On traite donc le cas $y \neq 0_E$.

On pose, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f(\lambda) = \|x + \lambda y\|^2 = \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle.$$

On a, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f(\lambda) = \langle x, x \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle.$$

Ainsi, f est un polynôme du second degré qui est toujours positif (car $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire positive). On en déduit que son discriminant est négatif ou nul, donc

$$4\langle x, y \rangle^2 - 4\|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0,$$

d'où le résultat.

Le cas d'égalité correspond à un discriminant nul, et équivaut donc à l'annulation de f , c'est-à-dire au fait qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = 0$. La forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ étant définie, c'est équivalent au fait que $x + \lambda y = 0_E$, donc que x et y sont colinéaires. $\square$

Remarque 2.0.8.

En géométrie du plan et de l'espace, on a, pour deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ non nuls,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \left(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \right).$$

Dans ce cas, l'inégalité de Cauchy-Schwarz est assez évidente. Le cas d'égalité correspond au cas où $\left| \cos \left(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \right) \right| = 1$, donc au cas où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Exercice 2.0.9.

On considère $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt.$$

Montrer que si $f \in E$, alors

$$\left| \int_0^1 f(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_0^1 f^2(t) dt}.$$

Quand y a-t-il égalité ?

Proposition 2.0.10 (propriétés d'une norme).
On a pour tout $x, y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$ les propriétés suivantes.

Positivité : $\|x\| \geq 0$

Séparation : $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$

Homogénéité : $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

Inégalité triangulaire : $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Démonstration.

La positivité et la séparation viennent immédiatement de la positivité d'une racine carrée et du caractère défini du produit scalaire.

Pour l'homogénéité :

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \|x\|.$$

Enfin, pour l'inégalité triangulaire, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \\ &\leq (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

□

Remarque 2.0.11.

Les propriétés précédentes sont en fait les quatre points de la définition de la notion générale de *norme* (HP).

Exercice 2.0.12.

Soit $v \in E$ non nul, combien existe-t-il de vecteurs unitaires colinéaires à v ? Les donner.

Les identités suivantes généralisent les identités remarquables, et sont donc utiles.

Proposition 2.0.13 (Identité de polarisation).

Pour tout $x, y \in E$:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

Proposition 2.0.14 (Identité du parallélogramme).

Pour tout $x, y \in E$:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Démonstration.

On utilise les développements :

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2, \\ \|x - y\|^2 &= \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2, \end{aligned}$$

Il suffit de les sommer/soustraire.

□

Remarque 2.0.15 (Identité très utile).

Pour tout $x, y \in E$:

$$\|x\|^2 - \|y\|^2 = \langle x + y, x - y \rangle.$$

Définition 2.0.16 (distance associée).

Soit $x, y \in E$, on définit

$$d(x, y) = \|y - x\|.$$

La fonction $d : E^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ est appelée *distance associée à la norme* $\|\cdot\|$.

Proposition 2.0.17 (propriétés d'une distance).

Pour tout $x, y, z \in E$, on a les propriétés suivantes.

Symétrie : $d(x, y) = d(y, x)$

Positivité : $d(x, y) \geq 0$

Séparation : $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

Inégalité triangulaire : $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Démonstration.

On a $d(y, x) = \|x - y\| = \|-(y - x)\| = |-1| \|y - x\| = d(x, y)$, d'où la symétrie.

Les propriétés de positivité et de séparation découlent directement des propriétés de la norme.

Enfin, par l'inégalité triangulaire sur la norme,

$$\begin{aligned} d(x, z) &= \|z - x\| \\ &= \|(z - y) + (y - x)\| \\ &\leq \|z - y\| + \|y - x\| \\ &\leq d(x, y) + d(y, z). \end{aligned}$$

□

Exercice 2.0.18.

On reprend les notations de l'exercice 2.0.2. Calculer la distance entre 1 et X .

3 Orthogonalité

Dans cette partie, E un espace préhilbertien, et est donc muni d'un produit scalaire, que l'on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Définition 3.0.1 (orthogonalité de vecteurs).

Deux vecteurs $x, y \in E$ sont dits *orthogonaux* lorsque $\langle x, y \rangle = 0$. On le note : $x \perp y$.

Remarque 3.0.2 (utile).

Si $x \perp x$, alors $x = 0_E$. Notamment, le vecteur nul est le seul vecteur orthogonal à tout vecteur.

Exercice 3.0.3.

On pose $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$. Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $X - \lambda$ est orthogonal à 1.

Définition 3.0.4 (orthogonalité de sev).

Deux sev F, G de E sont dits *orthogonaux* lorsque

$$\forall f \in F, \forall g \in G, f \perp g.$$

On le note : $F \perp G$.

Remarque 3.0.5.

Nous ne pouvons réaliser des dessins que dans le plan et dans l'espace. Les situations que l'on peut donc ainsi représenter sont spécifiques au cas de la dimension finie (et même au cas des dimensions 2 et 3). Vous pouvez vous reporter aux dessins de la partie 5 pour des exemples concrets, en gardant à l'esprit que certaines propriétés semblant « évidentes » sur ces dessins ne sont pas vraies en toute généralité.

Définition 3.0.6 (orthogonal d'un sev).

Soit F un sev de E . L'orthogonal de F est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de F , c'est donc la partie de E :

$$F^\perp = \{ x \in E \mid \forall f \in F, x \perp f \}.$$

Remarque 3.0.7.

On peut de même définir l'orthogonal $A^\perp$ d'une partie A de E (HP).

Proposition 3.0.8.

Soit F un sous-espace vectoriel de E .

1. $F^\perp$ est un sev de E .
2. F et $F^\perp$ sont en somme directe.
3. $F \perp F^\perp$.

Démonstration. 1. Soit $g, h \in F^\perp$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Par définition, on a bien $F^\perp \subset E$.

Soit $f \in F$, on a $0_E \perp f$, donc $0_E \in F^\perp$.

Enfin, par bilinéarité du produit scalaire, pour $f \in F$,

$$\langle f, \lambda g + \mu h \rangle = \lambda \langle f, g \rangle + \mu \langle f, h \rangle = 0,$$

donc

$$f \perp (\lambda g + \mu h),$$

donc $\lambda g + \mu h \in F^\perp$.

Ainsi, $F^\perp$ est un sev de E .

2. Soit $x \in F \cap F^\perp$. Comme $x \in F$ et $x \in F^\perp$, on a $x \perp x$, donc $x = 0_E$.

Ainsi, $F \cap F^\perp = \{0_E\}$, donc la somme $F + F^\perp$ est directe.

3. Soit $f \in F$ et $g \in F^\perp$. Par définition, $f \perp g$, donc $F \perp F^\perp$.

□

Remarque 3.0.9 (à démontrer en exercice).

$F \perp G$ si et seulement si $F \subset G^\perp$.

$F \subset (F^\perp)^\perp$ (sans égalité de manière générale).

Exercice 3.0.10.

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x - y + z = 0$, le plan $\mathcal{Q}$ d'équation $x + y - z = 0$, et la droite $\mathcal{D}$ dirigée par le vecteur de coordonnées $(2, -1, 1)$.

A-t-on $\mathcal{P} \perp \mathcal{D}$? $\mathcal{P} \perp \mathcal{Q}$? $\mathcal{D} \perp \mathcal{Q}$?

Proposition 3.0.11 (HP, naturel et très utile).

Soit $f_1, \dots, f_p \in E$. Alors, pour tout $x \in E$,

$$x \in \text{Vect}(f_1, \dots, f_p)^\perp \Leftrightarrow x \perp f_1, \dots, x \perp f_p.$$

Démonstration.

Soit $x \in E$.

Supposons que $x \in \text{Vect}(f_1, \dots, f_p)^\perp$. Soit $1 \leq i \leq p$, comme $f_i \in \text{Vect}(f_1, \dots, f_p)$, alors $x \perp f_i$.

Réciproquement, supposons que $x \perp f_1, \dots, x \perp f_p$. Soit $f \in \text{Vect}(f_1, \dots, f_p)$, il existe alors $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ tels que

$$f = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_p f_p.$$

Par bilinéarité du produit scalaire,

$$\langle x, f \rangle = \alpha_1 \langle x, f_1 \rangle + \dots + \alpha_p \langle x, f_p \rangle = 0.$$

Ainsi, $x \in \text{Vect}(f_1, \dots, f_p)^\perp$.

□

Exercice 3.0.12.

Dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, muni de $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$, déterminer l'orthogonal de $F = \mathbb{R}_1[X]$.

Exercice 3.0.13 (difficile ?).

On considère dans $\mathbb{R}[X]$ le sev

$$F = \text{Vect}(1 + X, 1 + X^2, \dots, 1 + X^n, \dots).$$

On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \mid \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_k.$$

1. Montrer que $F \neq \mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer $F^\perp$ pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}[X]$.
3. *Question supplémentaire* : déterminer une droite supplémentaire à F dans $\mathbb{R}[X]$.

4 Familles orthogonales et orthonormales

4.1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition 4.1.1.

Une famille de vecteurs $(x_i)_{i \in I}$ est dite *orthogonale* si ses vecteurs sont orthogonaux deux à deux, *i.e.* si

$$\forall i, j \in I, i \neq j \Rightarrow x_i \perp x_j.$$

Une famille orthogonale est dite *orthonormée* (ou *orthonormale*) si de plus tous ses vecteurs sont unitaires (*i.e.* de norme 1).

Remarque 4.1.2.

Une famille de vecteurs $(x_i)_{i \in I}$ est donc orthonormée si et seulement si

$$\forall i, j \in I, \langle x_i, x_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

Exercice 4.1.3.

Dans $\mathbb{R}^3$, on donne $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, -1, 0)$ et $w = (1, 1, a)$, où $a \in \mathbb{R}$. Pour quel(s) a la famille (u, v, w) est-elle orthogonale ?

Le cas échéant, construire à partir de (u, v, w) une famille orthonormée.

Proposition 4.1.4 (utile).

Une famille orthogonale de vecteurs tous non nuls est une famille libre.

Démonstration.

Démontrons ce résultat dans le cas d'une famille infinie. Soit $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une telle famille, soit $p \geq 0$ et $\lambda_0, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$. Supposons que

$$\lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_p x_p = 0_E,$$

et soit $0 \leq k \leq p$. Alors,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle x_k, 0_E \rangle \\ &= \langle x_k, \lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_p x_p \rangle \\ &= \sum_{j=0}^p \lambda_j \langle x_k, x_j \rangle. \end{aligned}$$

Comme si $j \neq k$, on a $x_k \perp x_j$, on obtient donc

$$0 = \lambda_k \|x_k\|^2.$$

Or, $x_k \neq 0_E$, donc $\|x_k\| \neq 0$, donc $\lambda_k = 0$. Ainsi, la famille $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est libre. $\square$

Corollaire 4.1.5.

Toute famille orthonormée est libre.

Proposition 4.1.6 (théorème de Pythagore).

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille orthogonale. Alors,

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2.$$

Démonstration.

On peut utiliser le résultat de l'exercice 2.0.6, ou bien démontrer ce résultat par récurrence simple sur n .

En effet, le cas $n = 1$ est immédiat, et le cas $n = 2$ découle immédiatement de la remarque 2.0.5.

Soit donc $n \geq 1$, on suppose que pour toute famille orthogonale $(x_1, \dots, x_n)$:

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2.$$

Soit $(x_1, \dots, x_{n+1})$ une famille orthogonale. Remarquons que

$$\langle x_{n+1}, \sum_{i=1}^n x_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x_{n+1}, x_i \rangle,$$

donc que

$$x_{n+1} \perp \sum_{i=1}^n x_i$$

Alors, en utilisant la remarque 2.0.5, puis par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^{n+1} x_i \right\|^2 &= \left\| \sum_{i=2}^n x_i + x_{n+1} \right\|^2 \\ &= \left\| \sum_{i=2}^n x_i \right\|^2 + \|x_{n+1}\|^2 \\ &= \sum_{i=2}^n \|x_i\|^2 + \|x_{n+1}\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \|x_i\|^2. \end{aligned}$$

On obtient donc bien le résultat par récurrence simple. $\square$

Remarque 4.1.7.

Le théorème de Pythagore vu au collège correspond plutôt à l'énoncé suivant :

$$\forall x, y \in E, x \perp y \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

4.2 Orthonormalisation

Théorème 4.2.1 (orthonormalisation de Gram-Schmidt).

Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille libre de E . Alors il existe une famille $(v_1, \dots, v_n)$ de E telle que :

- ▷ $(v_1, \dots, v_n)$ est orthonormale ;
- ▷ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\text{Vect}(u_1, \dots, u_k) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_k).$$

Les v_k sont uniques au signe près. Notamment, avec

$$\tilde{v}_k = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_k, v_i \rangle v_i,$$

on peut choisir $v_k = \frac{\tilde{v}_k}{\|\tilde{v}_k\|}$.

Démonstration.

On note $F_k = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ pour chaque $1 \leq k \leq n$. Remarquons que $F_{k+1} = F_k + \text{Vect}(u_{k+1})$.

On pose $\tilde{v}_1 = u_1$. On veut choisir un vecteur unitaire dans $F_1 = \text{Vect}(u_1)$. Il n'y a que deux choix : $\pm \frac{u_1}{\|u_1\|}$.

Analyse : on suppose la famille construite jusqu'au rang k . Construisons le $(k+1)^{\text{e}}$ vecteur.

Il faut choisir v_{k+1} dans $F_{k+1} = \text{Vect}(v_1, \dots, v_k, u_{k+1})$ de sorte que $v_{k+1} \in F_k^\perp$. Il existe donc $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $v_{k+1} = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k + \mu u_{k+1}$.

De plus, si $1 \leq j \leq k$, on a $v_{k+1} \perp v_j$, donc $\langle v_{k+1}, v_j \rangle = 0$, donc $\lambda_j + \mu \langle u_{k+1}, v_j \rangle = 0$, donc $\lambda_j = -\mu \langle u_{k+1}, v_j \rangle$.

Ainsi,

$$v_{k+1} = \mu \left(u_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle u_{k+1}, v_i \rangle v_i \right).$$

Avec

$$\tilde{v}_{k+1} = u_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle u_{k+1}, v_i \rangle v_i,$$

on choisit donc v_{k+1} dans la droite vectorielle $\text{Vect}(\tilde{v}_{k+1})$. Dans cette droite, il n'y a que deux vecteurs unitaires : $\pm \frac{\tilde{v}_{k+1}}{\|\tilde{v}_{k+1}\|}$.

Synthèse : on a vu l'unicité au signe près. On vérifie que les vecteurs trouvés conviennent bien. $\square$

Remarque 4.2.2.

Ce procédé est utile à la fois théoriquement et en pratique. Lorsqu'on veut le mettre en œuvre effectivement, il est toutefois souvent assez lourd de calculer les vecteurs $v_1, \dots, v_n$. On préférera calculer les vecteurs $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n$ introduits dans l'énoncé, quitte à les renormaliser à la fin du procédé pour revenir aux vecteurs $v_1, \dots, v_n$. On a alors la formule suivante :

$$\tilde{v}_k = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle u_k, \tilde{v}_i \rangle}{\|\tilde{v}_i\|^2} \tilde{v}_i.$$

L'algorithme consiste donc à pose $\tilde{v}_1 = u_1$ et à effectuer les calculs suivants, successivement pour chaque $1 \leq k \leq n$:

1. calculer $\langle u_k, \tilde{v}_i \rangle$ pour chaque $1 \leq i < k$;

2. calculer $\tilde{v}_k = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle u_k, \tilde{v}_i \rangle}{\|\tilde{v}_i\|^2} \tilde{v}_i$;

3. calculer $\|\tilde{v}_k\|^2$.

Exercice 4.2.3.

Dans $E = \mathbb{R}^4$, orthonormaliser la famille (u_1, u_2, u_3)

suivante :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.2.4 (plus calculatoire).

Orthonormaliser $(1, X, X^2)$ pour le produit scalaire de $\mathbb{R}_2[X]$,

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt.$$

Vérifier que l'on trouve (P_1, P_2, P_3) , où

$$\begin{aligned} P_1 &= 1, \\ P_2 &= \frac{X - 1/2}{1/(2\sqrt{3})} = \sqrt{3}(2X - 1), \\ P_3 &= \frac{X^2 - X + 1/6}{\|\dots\|} = \sqrt{5}(6X^2 - 6X + 1). \end{aligned}$$

4.3 Calculs en base orthonormée

Dans cette sous-partie, E est supposé être un espace euclidien : il est donc de dimension finie (on note $n = \dim(E)$), et muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Théorème 4.3.1 (existence de base orthonormée).
 E possède au moins une base orthonormée.

Démonstration.

Il suffit de prendre une base $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ de E et de l'orthonormaliser en une famille $\mathcal{B}' = (v_1, \dots, v_n)$.

La famille $\mathcal{B}'$ est une famille libre (car orthonormée) de $n = \dim(E)$ vecteurs, c'est donc une base de E . $\square$

Théorème 4.3.2 (Complétion de famille orthonormée).
Toute famille orthonormée de vecteurs de E peut être complétée en une base orthonormée de E .

Démonstration.

Soit $(v_1, \dots, v_p)$ une telle famille, on la complète en une base $(v_1, \dots, v_n)$ de E , que l'on orthonormalise en une base $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ de E . Or, lors des p premières étapes du procédé d'orthonormalisation, par l'unicité au signe près, on choisit à chaque fois $u_i = \pm v_i$. On peut donc effectuer le choix $u_i = v_i$, et $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_p, u_{p+1}, \dots, u_n)$ est bien une base orthonormée de E qui complète la famille $(v_1, \dots, v_p)$. $\square$

Proposition 4.3.3 (Coordonnées dans une base orthonormée).

Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une base orthonormée de E . Alors, pour tout $x \in E$,

$$x = \sum_{i=1}^n \langle x, v_i \rangle v_i.$$

Démonstration.

Soit $x \in E$, soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k$. Si $1 \leq k \leq n$, on a par bilinéarité du produit scalaire

$$\begin{aligned} \langle x | v_k \rangle &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle v_k, v_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{i,k} \\ &= \lambda_k. \end{aligned}$$

□

Exercice 4.3.4.

Trouver les coordonnées de $(1, -3)$ dans la base $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)\right)$ (pour le produit scalaire usuel).

Exercice 4.3.5.

Exprimer la formule de la proposition 4.3.3 dans le cas où $(v_1, \dots, v_n)$ base orthogonale de E .

Proposition 4.3.6 (Expression du produit scalaire dans une base orthonormale).

Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une base orthonormée de E . Soit $x, y \in E$ de coordonnées respectives $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ dans la base $(v_1, \dots, v_n)$. Alors

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Démonstration.

Par bilinéarité

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{j=1}^n y_j v_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle v_i, v_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \delta_{i,j} \\ &= \sum_{i=1}^n x_i y_i. \end{aligned}$$

□

Remarque 4.3.7.

En reprenant les notations précédentes,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, v_i \rangle \langle y, v_i \rangle.$$

Corollaire 4.3.8.

Avec les mêmes notations, $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$.

Remarque 4.3.9.

Avec $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$, et

$$X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

ainsi que

$$Y = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

on a alors $\langle x, y \rangle = X^T Y$ et $\|x\| = \sqrt{X^T X}$.

Remarque 4.3.10.

Tous les produits scalaires ont la même expression « usuelle » à condition de se placer dans une base orthonormée **pour ce produit scalaire**.

Remarque 4.3.11.

Ces formules s'adaptent encore dans le cas de bases orthogonales.

5 Supplémentaire et projection orthogonale

Dans cette partie, E est un espace préhilbertien dont on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire. Ainsi, E n'est pas nécessairement de dimension finie. Lorsque l'on considérera un sous-espace vectoriel F de dimension finie, et l'on notera $r = \dim(F)$.

5.1 Supplémentaire orthogonal

Théorème 5.1.1.

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E , alors $E = F \oplus F^\perp$.

Démonstration.

On a montré (proposition 3.0.8) que F et $F^\perp$ sont en somme directe.

Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base orthonormale de F (elle existe d'après le théorème 4.3.1).

Effectuons une partie d'analyse. Soit $x \in E$, $f \in F$ et $g \in F^\perp$ tels que $x = f + g$.

Alors, si $v \in F$, comme $g \perp v$,

$$\langle x, v \rangle = \langle f, v \rangle + \langle g, v \rangle = \langle f, v \rangle.$$

Ainsi,

$$f = \sum_{i=1}^r \langle f, e_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^r \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Effectuons maintenant une partie de synthèse. Soit x un vecteur quelconque de E . On pose

$$f = \sum_{i=1}^r \langle x, e_i \rangle e_i$$

et $g = x - f$. On a alors directement $x = f + g$ et $f \in F$. De plus, si $1 \leq j \leq r$,

$$\begin{aligned} \langle g, e_j \rangle &= \langle x, e_j \rangle - \sum_{i=1}^r \langle x, e_i \rangle \langle e_j, e_i \rangle \\ &= \langle x, e_j \rangle - \sum_{i=1}^r \langle x, e_i \rangle \delta_{i,j} \\ &= \langle x, e_j \rangle - \langle x, e_j \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

donc $g \in F^\perp$.

On a donc $E = F + F^\perp$, d'où le résultat. $\square$

Corollaire 5.1.2.

Si E est un espace euclidien et si F est un sev de E , alors

$$\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F).$$

5.2 Projection orthogonale

Définition 5.2.1.

Soit F un sev. de E de dimension finie. On appelle *projection orthogonale* sur F la projection sur F et parallèlement à $F^\perp$.

Remarque 5.2.2.

De même, on appelle *symétrie orthogonale* par rapport à F la symétrie par rapport à F et parallèlement à $F^\perp$.

Exercice 5.2.3.

Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer la projection orthogonale sur le plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x + y - z = 0$.

Proposition 5.2.4.

Soit F un sev de E de dimension finie et $(e_1, \dots, e_r)$ une base orthonormée de F . On note p la projection orthogonale sur F . Alors, pour tout $x \in E$, on a

$$p(x) = \sum_{i=1}^r \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Démonstration.

Démontré pendant la démonstration du théorème 5.1.1. $\square$

Exercice 5.2.5 (suite de l'exercice 4.2.3).

Déterminer la projection orthogonale sur $F =$

$$\text{Vect}(u_1, u_2, u_3) \text{ de } x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque 5.2.6.

Si l'on ne dispose pas d'une base orthonormée de F , on peut déterminer $p(x)$ en utilisant le fait que $p(x)$ est l'unique vecteur de F tel que $x - p(x) \in F^\perp$, donc qu'il est orthogonal à tous les vecteurs d'une famille génératrice de F .

Si $(f_1, \dots, f_r)$ est une base de F , il s'agit donc de déterminer des scalaire $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ tels que pour tout $1 \leq i \leq r$:

$$f_i \perp \left(x - \sum_{j=1}^r \lambda_j f_j \right),$$

c'est-à-dire tels que

$$\sum_{j=1}^r \lambda_j \langle f_j, f_i \rangle = \langle x, f_i \rangle.$$

On obtient donc un système à r équations et r inconnues, que l'on sait résoudre.

Exercice 5.2.7.

On se place dans $\mathbb{R}^3$, muni de sa structure euclidienne usuelle.

Déterminer le projeté orthogonal du vecteur $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sur le plan

$$\mathcal{P} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

5.3 Distance à un sous-espace vectoriel

Définition 5.3.1 (distance à un sev.).

Soit F un sev de E , soit $x \in E$. On appelle *distance de x à F* le réel

$$d(x, F) = \inf \{ \|x - f\| \mid f \in F \}.$$

Théorème 5.3.2 (Théorème de la projection orthogonale).

Soit F un sev de dimension finie de E , soit

$x \in E$. Alors, il existe un unique $f \in F$ tel que $d(x, F) = \|x - f\|$: c'est le projeté orthogonal de x sur F (voir figure 1).

Autrement, dit, si l'on note $p(x)$ le projeté orthogonal de x sur F :

$$\triangleright d(x, F) = \|x - p(x)\| ;$$

$$\triangleright \text{pour tout } f \in F, \text{ si } f \neq p(x), \|x - f\| > \|x - p(x)\|.$$

Démonstration.

Soit $x \in E$, notons $p(x)$ sont projeté orthogonal sur F . Pour tout $f \in F$,

$$\begin{aligned} \|x - f\|^2 &= \underbrace{\|x - p(x)\|}_{\in F^\perp}^2 + \underbrace{\|p(x) - f\|}_{\in F}^2 \\ &= \|x - p(x)\|^2 + \|p(x) - f\|^2 \\ &\geq \|x - p(x)\|^2, \end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si $f = p(x)$.

En particulier, $d(x, F) \geq \|x - p(x)\|$. Or $p(x) \in F$ donc $d(x, F) \leq \|x - p(x)\|$; on en déduit l'égalité. $\square$

Remarque 5.3.3.

La borne inférieure écrite dans la définition 5.3.1 est donc en fait un minimum. On pourra retenir que le théorème de la projection orthogonale donne

$$\|x - p(x)\| = d(x, F) = \min \{ \|x - f\| \mid f \in F \}.$$

Corollaire 5.3.4.

Sous les mêmes hypothèses, en notant p la projection orthogonale sur F , on a pour tout $x \in E$,

$$d(x, F)^2 = \|x\|^2 - \|p(x)\|^2.$$

Démonstration.

C'est donné par le théorème de Pythagore. $\square$

Exercice 5.3.5.

Dans $\mathbb{R}^3$, muni de sa structure euclidienne usuelle, on considère $u = (1, 1, 1)$ et F d'équation $x + 2y + z = 0$.

Calculer $d(u, F)$.

Exercice 5.3.6 (suite de l'exercice 4.2.4).

On rappelle que, pour le produit scalaire

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt,$$

Une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$ est la famille $(1, \sqrt{3}(2X - 1))$.

Montrer que la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) & \mapsto \int_0^1 (x^2 - a - bx)^2 dx \end{cases}$$

atteint un minimum pour $a = -1/6$ et $b = 1$, qui vaut $1/180$.

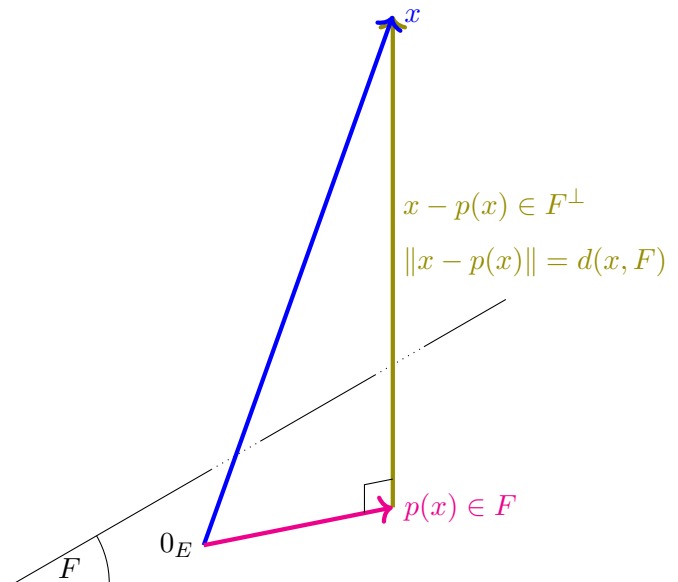


FIGURE 1 – Projection orthogonale sur un sev F .

5.4 Cas des hyperplans

Dans cette partie, E est un espace euclidien, et l'on note $n = \dim(E)$.

Définition 5.4.1.

Un *hyperplan* de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$.

Exemple 5.4.2.

Dans l'espace, les hyperplans sont exactement les plans.

Exemple 5.4.3.

$\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$.

Proposition 5.4.4.

Soit H un hyperplan de E . Alors, $H^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E . Il existe donc $\vec{n} \in E$ non nul tel que $H^\perp = \text{Vect}(\vec{n})$, et donc $H = \text{Vect}(\vec{n})^\perp$.

Notamment, on a

$$H = \{ x \in E \mid \langle \vec{n}, x \rangle = 0 \}.$$

On dit que $\vec{n}$ est un vecteur normal à H .

Définition 5.4.5.

On appelle *réflexion* toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

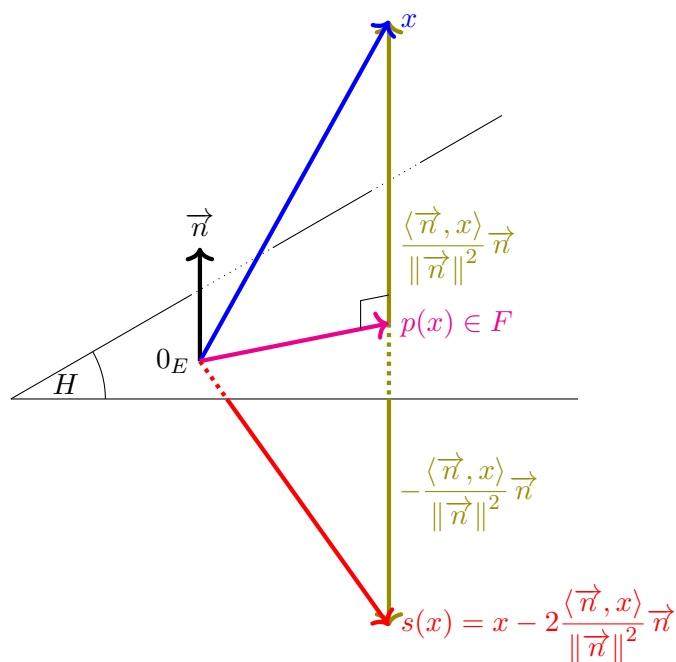


FIGURE 2 – Réflexion s par rapport à un hyperplan H .

Remarque 5.4.6 (voir figure 2).

Si $\vec{n}$ est un vecteur normal à H , alors le projeté orthogonal de x sur $H^\perp = \text{Vect}(\vec{n})$ est

$$\frac{\langle \vec{n}, x \rangle}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n},$$

et donc le réfléchi de x par rapport à H est

$$s(x) = x - 2 \frac{\langle \vec{n}, x \rangle}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}.$$

Exercice 5.4.7.

On reprend les notations de l'exercice 5.2.7.

Déterminer un vecteur normal à $\mathcal{P}$, ainsi que l'expression de la réflexion par rapport à $\mathcal{P}$.

Exercice 5.4.8.

Dans $\mathbb{R}^4$, muni de sa structure euclidienne usuelle, on considère $u = (1, 1, 1, 1)$ et H d'équation $x - y + z + t = 0$.

Calculer le projeté orthogonal de u sur H , la distance de u à H et le symétrique orthogonal de u par rapport à H .