

# XIV Équations différentielles

Dans tout le chapitre,  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  de diamètre non nul, et  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

## 1. ÉDL du premier ordre

### 1.1. Structure des solutions

Soit l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$y' + a(t)y = b(t), \quad (\mathcal{E})$$

de la variable fonctionnelle  $y$ , où  $a$  et  $b$  sont deux fonctions continues, définies sur l'intervalle  $I$ .

#### Définition 1.1.1.

Une fonction  $y : I \rightarrow \mathbb{K}$  est une solution de  $(\mathcal{E})$  si  $y$  est dérivable sur  $I$  et si

$$\forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t).$$

#### Remarque 1.1.2.

L'équation  $(\mathcal{E})$  peut être présentée de nombreuses autres manières. En voici quelques :

$$\begin{aligned} y' + ay &= b, \\ y'(t) + a(t)y(t) &= b(t), \\ y' + a(x)y &= b(x), \\ y'(x) + a(x)y(x) &= b(x). \end{aligned}$$

#### Définition 1.1.3.

L'équation différentielle homogène associée à  $(\mathcal{E})$  est

$$y' + a(t)y = 0. \quad (\mathcal{H})$$

La fonction  $b$  est appelée *second membre* de  $(\mathcal{E})$ .

#### Théorème 1.1.4 (structure des solutions).

Si  $y_0$  est une solution de  $(\mathcal{E})$ , alors les fonctions solutions de  $(\mathcal{E})$  sont exactement les fonctions de la forme

$$t \mapsto y_0(t) + h(t),$$

où  $h$  est une solution quelconque de  $(\mathcal{H})$ .

#### Démonstration.

Il suffit de voir que l'on a les équivalences :

$$\begin{aligned} y \text{ est sol. de } (\mathcal{E}) &\Leftrightarrow y' + ay = b \\ &\Leftrightarrow y' + ay = y'_0 + ay_0 \\ &\Leftrightarrow (y - y_0)' + a(y - y_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow (y - y_0) \text{ est sol. de } (\mathcal{H}). \end{aligned}$$

On obtient le résultat annoncé en observant que l'on a toujours  $y = y_0 + (y - y_0)$ .  $\square$

Le théorème précédent indique que l'ensemble des solutions de  $(\mathcal{E})$  vérifie la structure « solution particulière + solutions de l'équation homogène ». Afin de déterminer l'ensemble des solutions de cette équation, on procède donc en deux temps :

- ▷ on détermine toutes les solutions de l'équation homogène  $(\mathcal{H})$  ;
- ▷ on détermine une solution particulière de l'équation  $(\mathcal{E})$ .

#### Théorème 1.1.5.

Soit  $A$  une primitive sur  $I$  de la fonction  $a$ . Alors, les solutions de  $(\mathcal{H})$  sont exactement les fonctions de la forme

$$t \mapsto Ce^{-A(t)},$$

où  $C \in \mathbb{K}$  est une constante quelconque.

#### Démonstration.

Comme  $a$  est continue, elle admet bien une primitive  $A$ , qui est dérivable par définition. Remarquons que la fonction  $t \mapsto e^{A(t)}$  ne s'annule jamais.

Soit  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable. Il suffit donc de montrer que  $y$  est solution de  $(\mathcal{H})$  si et seulement si la fonction  $z : t \mapsto y(t)e^{A(t)}$  est constante. Cette fonction  $z$  est bien dérivable comme produit de fonctions dérivables, et pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$z'(t) = y'(t)e^{A(t)} + a(t)y(t)e^{A(t)} = e^{A(t)}(y'(t) + a(t)y(t)).$$

Ainsi,  $z'$  est nulle si et seulement si  $y$  est solution de  $(\mathcal{H})$ , ce qui donne le résultat annoncé.  $\square$

#### Remarque 1.1.6 (solutions évidentes).

Le théorème précédent indique que l'ensemble des solutions de  $(\mathcal{H})$  est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de l'espace vectoriel des fonctions continues. Géométriquement, c'est une droite vectorielle.

Toutes les solutions de l'équation homogène sont donc proportionnelles. Ainsi, si l'on arrive à trouver une solution non nulle « évidente »  $h$  de  $(\mathcal{H})$ , alors les solutions de l'équation homogène seront exactement les fonctions de la forme  $t \mapsto Ch(t)$ , où  $C$  est une constante quelconque.

#### Exercice 1.1.7.

Trouver des solutions évidentes des équations différentielles homogènes suivantes.

1.  $y'(x) - y(x) = 0$
2.  $y'(x) + 3y(x) = 0$
3.  $xy'(x) - y(x) = 0$

**Remarque 1.1.8.**

Il est toujours important de simplifier l'exponentielle intervenant dans l'ensemble des solutions de l'équation  $(\mathcal{H})$ .

**Exercice 1.1.9.**

Donner les solutions des équations homogènes suivantes.

1.  $y'(x) - \frac{2}{x}y(x) = 0$
2.  $y' + (\ln(t) + 1)y = 0$

**Remarque 1.1.10.**

Les solutions de  $(\mathcal{H})$  sont proportionnelles à une fonction s'écrivant sous la forme d'une exponentielle. Excepté la solution nulle, ces solutions ne s'annulent en aucun point.

**1.2. Recherche d'une solution particulière**

Le théorème de structure des solutions indique que, une fois les solutions de l'équation homogène déterminées, il suffit de trouver **une** solution de l'équation  $(\mathcal{E})$  (que l'on appelle souvent solution particulière), pour déterminer toutes les solutions de  $(\mathcal{E})$ .

Il est souvent possible de trouver des solutions « évidentes » (souvent constantes, voir exercice 1.2.1). Si ce n'est pas le cas, on utilisera systématiquement la méthode exposée dans le théorème 1.2.4.

**Exercice 1.2.1.**

Déterminer des solutions évidentes des équations différentielles suivantes.

1.  $y'(x) - 3xy(x) = 6x$
2.  $y'(x) + e^x y(x) = e^x$ .
3.  $y'(x) + xy(x) = 1 + x^2$ .

**Remarque 1.2.2.**

Par le théorème 1.1.5, une solution  $h$  de  $(\mathcal{H})$  est non nulle si et seulement si elle ne s'annule jamais.

**Lemme 1.2.3.**

Soit  $h$  une solution de  $(\mathcal{H})$  ne s'annulant jamais, soit  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ , considérons  $C = \frac{y}{h}$ .

Alors,  $y$  est dérivable si et seulement si  $C$  l'est.

**Démonstration.**

Si  $y$  est dérivable, alors  $C$  est dérivable comme quotient de deux fonctions qui le sont.

Réciproquement, si  $C$  est dérivable, alors  $y$  est dérivable comme produit de deux fonctions qui le sont.  $\square$

Le lemme précédent indique que, sans perte de généralité, on peut chercher une solution  $y$  de  $(\mathcal{E})$  sous la forme  $y : x \mapsto C(x)h(x)$ , où  $C$  est une fonction dérivable.

**Théorème 1.2.4** (méthode de la variation de la constante).

Soit  $h$  une solution de  $(\mathcal{H})$  ne s'annulant jamais, soit  $C : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable.

Posons  $y : x \mapsto C(x)h(x)$ . Alors,  $y$  est solution de  $(\mathcal{E})$  si et seulement :

$$\forall x \in I, \quad C'(x)h(x) = b(x).$$

Ainsi,  $y$  est une solution de  $(\mathcal{E})$  si et seulement si  $C$  est une primitive de la fonction  $x \mapsto \frac{b(x)}{h(x)}$ .

**Démonstration.**

Soit  $C : I \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable, soit  $y : x \mapsto C(x)h(x)$ . Alors,  $y$  est dérivable comme produit de fonction dérivables, et pour tout  $x \in I$  :

$$\begin{aligned} y'(x) + a(x)y(x) &= C'(x)h(x) + C(x)h'(x) + a(x)C(x)h(x) \\ &= C'(x)h(x) + C(x)(h'(x) + a(x)h(x)) \\ &= C'(x)h(x), \end{aligned}$$

car  $h$  est solution de l'équation homogène  $(\mathcal{H})$ .

On a donc bien le résultat annoncé.  $\square$

**Remarque 1.2.5.**

Le résultat du théorème précédent n'est pas forcément à retenir. Mieux vaut reprendre le calcul réalisé dans la preuve, avec une fonction  $h$  (non nulle) solution de  $(\mathcal{H})$ . On arrive alors à un problème de primitivation, que l'on saura résoudre dans les exercices proposés.

**Exemple 1.2.6** (rédaction type).

Considérons l'équation différentielle réelle  $y'(x) - 2xy(x) = xe^{x^2}$ . On la résout sur  $\mathbb{R}$ .

Une primitive de  $x \mapsto -2x$  est  $x \mapsto -x^2$ , et  $\exp(-(-x^2)) = \exp(x^2)$ , donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto C \exp(x^2),$$

où  $C$  est une constante réelle.

Soit  $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable, posons  $y : x \mapsto C(x)\exp(x^2)$ . Comme produit de fonctions dérivables,  $y$  est dérivable, et si  $x \in \mathbb{R}$  :

$$y'(x) = C'(x)\exp(x^2) + 2xC(x)\exp(x^2),$$

donc

$$y(x) - 2xy(x) = C'(x)\exp(x^2).$$

Ainsi,  $y$  est solution de l'équation différentielle étudiée si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad C'(x)\exp(x^2) = x\exp(x^2),$$

donc si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad C'(x) = x.$$

Or, une primitive de  $x \mapsto x$  est  $x \mapsto \frac{x^2}{2}$ .

Il suffit donc de considérer la fonction  $C : x \mapsto \frac{x^2}{2}$ , et la fonction

$$y_0 : x \mapsto \frac{x^2}{2} \exp(x^2)$$

est donc une solution de notre équation différentielle. Les solutions de cette équation sont donc les fonctions de la forme

$$y : x \mapsto C \exp(x^2) + \frac{x^2}{2} \exp(x^2),$$

où  $C \in \mathbb{R}$ .

### Remarque 1.2.7.

Une source d'erreurs bien trop fréquente est l'oubli de la multiplication par la solution de l'équation homogène, en fin de résolution.

### Exercice 1.2.8.

Trouver des solutions aux équations différentielles suivantes, en procédant par variation de la constante.

1.  $y' - 2y = 2te^{2t}$
2.  $y' + \frac{1}{x}y = 2\frac{\ln(x)}{x}$
3.  $y'(x) - \frac{3}{x}y(x) = x^5$

Enfin, lorsque le second membre se décompose comme combinaison linéaire de plusieurs fonctions « simples », on peut alors procéder par superposition.

### Proposition 1.2.9 (principe de superposition).

Soit  $b_1, b_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues, soit  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ .

Si  $y_1$  est solution de l'équation

$$y' + a(t)y = b_1(t)$$

et si  $y_2$  est solution de l'équation

$$y' + a(t)y = b_2(t),$$

alors  $\lambda y_1 + \mu y_2$  est solution de l'équation

$$y' + a(t)y = \lambda b_1(t) + \mu b_2(t).$$

### Démonstration.

On a  $y_1' + ay_1 = b_1$  et  $y_2' + ay_2 = b_2$ , donc,  $\lambda y_1 + \mu y_2$  étant dérivable, comme combinaison linéaire de fonctions dérivables,

$$\begin{aligned} (\lambda y_1 + \mu y_2)' + a(\lambda y_1 + \mu y_2) &= \lambda(y_1' + ay_1) + \mu(y_2' + ay_2) \\ &= \lambda b_1 + \mu b_2. \end{aligned}$$

□

### Exercice 1.2.10.

Déterminer une solution de l'équation différentielle

$$y' - \frac{1}{x}y = \frac{2}{x} + 3x.$$

## 1.3. Problème de Cauchy

### Définition 1.3.1.

Un problème de Cauchy associé à l'équation  $(\mathcal{E})$  est la donnée conjointe de cette équation et d'une condition initiale du type  $y(t_0) = y_0$ , où  $t_0 \in I$  et où  $y_0 \in \mathbb{K}$ .

Résoudre ce problème de Cauchy, c'est trouver une solution  $y$  de  $(\mathcal{E})$  vérifiant  $y(t_0) = y_0$ .

### Théorème 1.3.2 (de Cauchy).

Soit  $t_0 \in I$  et  $y_0 \in \mathbb{K}$ , il existe une unique fonction  $y : I \rightarrow \mathbb{K}$  solution du problème de Cauchy associé à  $(\mathcal{E})$ , avec la condition initiale  $y(t_0) = y_0$ .

### Démonstration.

Soit  $h$  une solution ne s'annulant jamais de l'équation homogène  $(\mathcal{H})$ , et  $y_0$  une solution de  $(\mathcal{E})$  (nous savons que deux telles fonctions existent, par les résultats obtenus précédemment).

Les solutions de  $(\mathcal{E})$  sont donc les fonctions de la forme  $t \mapsto y_0(x) + Ch(t)$ , où  $C \in \mathbb{K}$ , par le théorème de structure des solutions.

Soit  $C \in \mathbb{R}$ , soit  $y : t \mapsto y_0(t) + Ch(t)$ . La fonction  $y$  est donc une solution quelconque de  $(\mathcal{E})$ . On a alors

$$y(t_0) = y_0 \Leftrightarrow Ch(t_0) = y_0 - y_0(t_0).$$

Comme  $h$  est une solution de l'équation homogène non nulle de  $(\mathcal{H})$ , alors  $h$  ne s'annule jamais (par le théorème 1.1.5), donc  $h(t_0) \neq 0$ .

Il existe donc bien une unique constante  $C$  solution de l'équation précédente, d'où le résultat. □

### Exercice 1.3.3.

Trouver les solutions aux problèmes de Cauchy suivants.

1.  $y' - 3y = 5xe^{3x}$ ,  $y(0) = 0$ .
2.  $y' + \frac{1}{x}y(x) = \frac{1}{x}$ ,  $y(2) = -1$ .

## 1.4. Résumé de la méthodologie

On rappelle que l'on s'intéresse à l'équation

$$y' + a(t)y = b(t), \quad (\mathcal{E})$$

éventuellement accompagnée de la condition initiale  $y(t_0) = y_0$ .

1. Mettre l'équation différentielle sous la forme de  $(\mathcal{E})$ , en divisant éventuellement par le coefficient devant  $y'$ . Déterminer l'intervalle  $I$ , sur lequel  $a$  et  $b$  sont continues (et qui vérifie au besoin  $t_0 \in I$ ).

2. Écrire et résoudre l'équation homogène ( $\mathcal{H}$ ) :

- a) d'abord en cherchant une solution évidente ;
- b) sinon en utilisant le théorème 1.1.5.

*Attention aux erreurs de signe sur le terme  $\exp(-A(t))$  !*

*Simplifier le terme  $\exp(-A(t))$  !*

Bien penser à écrire la forme générale des solutions de l'équation homogène, en faisant intervenir un paramètre scalaire, pour préparer l'utilisation éventuelle de la méthode de variation de la constante.

Penser aussi à simplifier les solutions de l'équation homogène écrites.

3. Trouver une solution particulière de ( $\mathcal{E}$ ) :

- a) d'abord en trouvant une solution évidente ;
- b) sinon en procédant par variation de la constante.

*Attention à ne pas oublier de multiplier par la solution de l'équation homogène utilisée !*

- c) Éventuellement, on pourra écrire le second membre  $b$  comme combinaison linéaire de fonctions simples, et étudier chaque terme (en procédant par superposition).

## 4. Écrire la forme générale des solutions de l'équation différentielle, en faisant apparaître un paramètre scalaire.

## 5. Le cas échéant, déterminer le paramètre vérifiant la condition initiale.

## 6. Conclure.

## 2. Équations différentielles linéaires du second ordre

### 2.1. Généralités

Soit l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t), \quad (\mathcal{E})$$

de la variable fonctionnelle  $y$ , où  $a, b$  et  $c$  sont trois fonctions continues, définies sur l'intervalle  $I$ .

#### Définition 2.1.1.

Une fonction  $y : I \rightarrow \mathbb{K}$  est une solution de ( $\mathcal{E}$ ) si  $y$  est deux fois dérivable sur  $I$  et si

$$\forall t \in I, \quad y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t).$$

#### Remarque 2.1.2.

L'équation ( $\mathcal{E}$ ) peut être présentée de nombreuses autres manières. En voici quelques :

$$\begin{aligned} y'' + ay' + by &= c, \\ y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) &= c(t), \\ y'' + a(x)y' + b(x)y &= c(x), \\ y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) &= c(x). \end{aligned}$$

#### Définition 2.1.3.

L'équation homogène associée à ( $\mathcal{E}$ ) est

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0. \quad (\mathcal{H})$$

La fonction  $c$  est appelée *second membre* ( $\mathcal{E}$ ).

#### Théorème 2.1.4 (structure des solutions).

Si  $y_0$  est une solution de ( $\mathcal{E}$ ), alors les fonctions solutions de ( $\mathcal{E}$ ) sont exactement les fonctions de la forme

$$t \mapsto y_0(t) + h(t),$$

où  $h$  est une solution quelconque de ( $\mathcal{H}$ ).

#### Démonstration.

Il suffit de voir que l'on a les équivalences :

$$\begin{aligned} y \text{ est sol. de } (\mathcal{E}) &\Leftrightarrow y'' + ay' + by = c \\ &\Leftrightarrow y'' + ay' + by = y_0'' + ay_0' + by_0 \\ &\Leftrightarrow (y - y_0)'' + a(y - y_0)' + b(y - y_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow (y - y_0) \text{ est sol. de } (\mathcal{H}). \end{aligned}$$

On obtient le résultat annoncé en observant que l'on a toujours  $y = y_0 + (y - y_0)$ .  $\square$

Le théorème précédent indique que l'ensemble des solutions de ( $\mathcal{E}$ ) vérifie la structure « solution particulière + solutions de l'équation homogène ». Afin de déterminer l'ensemble des solutions de cette équation, on procède donc en deux temps :

- ▷ on détermine les solutions de l'équation homogène ( $\mathcal{H}$ ) ;
- ▷ on détermine une solution particulière de l'équation ( $\mathcal{E}$ ).

### 2.2. Théorèmes sur les solutions

#### Théorème 2.2.1.

L'ensemble des solutions de ( $\mathcal{H}$ ) est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de l'espace vectoriel des fonctions deux fois dérivables sur  $I$ .

Ainsi, il existe deux fonctions  $h_1, h_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fois dérivables et non colinéaires telles que les solutions de l'équation homogène  $(\mathcal{H})$  sont exactement les fonctions de la forme

$$x \mapsto Ch_1(x) + Dh_2(x),$$

où  $C, D \in \mathbb{K}$  sont des constantes quelconques.

#### Démonstration.

Notons  $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$  l'ensemble des solutions de  $(\mathcal{H})$ , montrons que  $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{D}^2(I, \mathbb{K})$ .

Alors, par définition on a  $\mathcal{S}_{\mathcal{H}} \subset \mathcal{D}^2(I, \mathbb{K})$ , et l'on voit immédiatement que la fonction nulle est solution de  $(\mathcal{H})$ .

Soit  $h_1, h_2$  deux solutions de  $(\mathcal{H})$ , soit  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ . Posons  $h = \lambda h_1 + \mu h_2$ . Alors,  $h$  est deux fois dérivable comme combinaison linéaire de fonctions deux fois dérivables, et pour tout  $t \in I$  :

$$\begin{aligned} h''(t) + a(t)h'(t) + b(t)h(t) &= \lambda(h_1''(t) + a(t)h_1'(t) + b(t)h_1(t)) \\ &\quad + \mu(h_2''(t) + a(t)h_2'(t) + b(t)h_2(t)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi,  $h$  est solution de  $(\mathcal{H})$ , donc  $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$  est bien un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{D}^2(I, \mathbb{K})$ .

Il n'est pas possible de démontrer entièrement le fait que  $\dim(\mathcal{S}_{\mathcal{H}}) = 2$ , avec les outils du programme. En admettant le théorème de Cauchy linéaire (2.2.3), on peut utiliser le fait que si  $t_0 \in I$ , alors l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{S}_{\mathcal{H}} &\rightarrow \mathbb{K}^2 \\ y &\mapsto (y(t_0), y'(t_0)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme, ce qui donne la dimension de  $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ .  $\square$

#### Définition 2.2.2.

Un problème de Cauchy associé à l'équation  $(\mathcal{E})$  est la donnée conjointe de cette équation et de conditions initiales du type

$$\begin{cases} y(t_0) &= y_0, \\ y'(t_0) &= y_1, \end{cases}$$

où  $t_0 \in I$  et où  $y_0, y_1 \in \mathbb{K}$ .

Résoudre ce problème de Cauchy, c'est trouver une solution  $y$  de  $(\mathcal{E})$  vérifiant  $y(t_0) = y_0$  et  $y'(t_0) = y_1$ .

#### Théorème 2.2.3 (de Cauchy).

Soit  $t_0 \in I$  et  $y_0, y_1 \in \mathbb{K}$ , il existe une unique fonction  $y : I \rightarrow \mathbb{K}$  solution du problème de Cauchy associé à  $(\mathcal{E})$ , avec les conditions initiales  $y(t_0) = y_0$  et  $y'(t_0) = y_1$ .

#### Démonstration.

Admis  $\square$

Lorsque l'on recherche une solution particulière d'une équation différentielle dont le second membre

s'écrit comme combinaison linéaire de fonctions simples, on peut procéder par superposition, en utilisant le résultat suivant.

#### Proposition 2.2.4 (principe de superposition).

Soit  $c_1, c_2 : I \rightarrow \mathbb{K}$  deux fonctions continues, soit  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ .

Si  $y_1$  est solution de l'équation

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = c_1(t)$$

et si  $y_2$  est solution de l'équation

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = c_2(t),$$

alors  $\lambda y_1 + \mu y_2$  est solution de l'équation

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = \lambda c_1(t) + \mu c_2(t).$$

#### Démonstration.

On a  $y_1'' + ay_1' + by_1 = c_1$  et  $y_2'' + ay_2' + by_2 = c_2$ , donc,  $\lambda y_1 + \mu y_2$  étant deux fois dérivable comme combinaison linéaire de fonctions deux fois dérivables,

$$\begin{aligned} (\lambda y_1 + \mu y_2)'' + a(\lambda y_1 + \mu y_2)' + b(\lambda y_1 + \mu y_2) &= \lambda(y_1'' + ay_1' + by_1) + \mu(y_2'' + ay_2' + by_2) \\ &= \lambda c_1 + \mu c_2. \end{aligned}$$

$\square$

### 2.3. Méthodes particulières

Il n'existe plus de méthode générale pour déterminer les solutions de l'équation homogène  $(\mathcal{H})$ , sauf dans le cas où les coefficients sont constants (cf. cours de TSI 1, à réviser). On cherchera la plupart du temps des solutions sous forme polynomiale, ou bien développable en série entière.

#### a. Solutions polynomiales

Dans le premier cas, on déterminera le degré d'une solution polynomiale, avant de se lancer dans le calcul des coefficients.

##### Exemple 2.3.1.

Trouvons les solutions de polynômes de l'équation

$$(t^2 + 2t + 2)y'' - 2(t + 1)y' + 2y = 0. \quad (1)$$

Remarquons d'abord que, vu que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $t^2 + 2t + 2 > 0$ , l'équation (1) peut être mise sous la forme de  $(\mathcal{E})$ , en divisant par  $t^2 + 2t + 2$ .

Soit  $y$  une fonction polynomiale de degré  $n \in \mathbb{N}$ , que l'on écrit

$$y(t) = a_n t^n + R(t),$$

où  $R$  est une fonction polynomiale de degré au plus  $n - 1$ , et où  $a_n \neq 0$ . On obtient alors, pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et avec les conventions d'usage :  $y'(t) = na_nt^{n-1} + R'(t)$  et  $y''(t) = n(n-1)a_nt^{n-2} + R''(t)$ , ce qui mène à

$$\begin{aligned} (t^2 + 2t + 2)y''(t) - 2(t+1)y'(t) + 2y(t) \\ = n(n-1)a_nt^n - 2na_nt^n + 2a_nt^n + H(t) \\ = (n^2 - 3n + 2)a_nt^n + H(t) \\ = (n-1)(n-2)a_nt^n + H(t), \end{aligned}$$

où  $H$  est une fonction polynomiale de degré au plus  $n - 1$ .

Ainsi, si  $y$  est solution de (1), alors  $(n-1)(n-2) = 0$ , donc  $n = 1$  ou  $n = 2$ .

Soit  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , considérons  $y : t \mapsto at^2 + bt + c$ . On obtient alors

$$(t^2 + 2t + 2)y''(t) - 2(t+1)y'(t) + 2y(t) = 4a - 2b + 2c.$$

Ainsi,  $y$  est solution de (1) si et seulement si  $2a - b + c = 0$ , donc si et seulement si  $c = b - 2a$ , donc si et seulement si

$$y : t \mapsto a(t^2 - 2) + b(t + 1).$$

On vient donc de trouver deux solutions polynomiales non proportionnelles à l'équation (1) : ce sont les fonctions  $t \mapsto t^2 - 2$  et  $t \mapsto t + 1$ . Par le théorème de structure des solutions de l'équation homogène d'une équation d'ordre 2, les solutions de cette équation sont donc les fonctions de la forme

$$t \mapsto a(t^2 - 2) + b(t + 1),$$

où  $a, b$  sont deux constantes réelles quelconques.

### Exercice 2.3.2.

Résoudre les équations différentielles suivantes, en trouvant des solutions polynomiales.

1.  $(t^2 + 2t)y'' - 2(t+1)y' + 2y = 0$
2.  $t^2y'' - 3ty' + 3y = 0$

### b. Solutions développables en série entière

On peut aussi chercher des solutions d'une équation sous la forme de fonctions développables en séries entières.

#### Exemple 2.3.3.

On considère l'équation différentielle

$$(1 + t^2)y'' + 4ty' + 2y = 0. \quad (2)$$

Cherchons des solutions  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  développables en série entière sur un intervalle  $] -R, R[$ , où  $R > 0$  est le rayon de convergence de ce développement.

Considérons une fonction  $y$  ainsi développable en série entière, que l'on écrit sous la forme

$$y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_nt^n.$$

On a alors successivement, après le décalage d'indices classique, pour tout  $t \in ] -R, R[$

$$\begin{aligned} ty'(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} na_nt^n, \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} na_{n+1}t^{n+1}, \\ y''(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}t^n, \\ t^2y''(t) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nt^n, \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_nt^n. \end{aligned}$$

On obtient, après simplifications de calcul,

$$\begin{aligned} (1 + t^2)y''(t) + 4ty'(t) + 2y(t) \\ = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)(a_{n+2} + a_n)t^n. \end{aligned}$$

Par unicité d'un DSE,  $y$  est solution de (2) si et seulement si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_{n+2} = -a_n$ .

Supposons que  $y$  est solution. On obtient donc, après une récurrence immédiate, que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$a_{2n} = (-1)^n a_0 \quad \text{et} \quad a_{2n+1} = (-1)^n a_1.$$

On obtient donc pour  $t \in ] -R, R[$  :

$$\begin{aligned} y(t) &= a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n+1} \\ &= a_0 \frac{1}{1+t^2} + a_1 \frac{t}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Remarquons que ces deux développements en séries entières ont un rayon de convergence 1, mais que les fonctions exprimées à la fin sont définies sur  $\mathbb{R}$ .

Il suffit finalement de vérifier que la fonction  $f : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$  et la fonction  $g : t \mapsto \frac{t}{1+t^2}$  sont solutions sur  $\mathbb{R}$  de (2), en les dérivant deux fois.

On vient donc de trouver deux solutions non proportionnelles de l'équation (2), qui est homogène : elles forment donc une base de l'espace des solutions de (2), par le théorème de structure des solutions d'une équation homogène.

Ainsi, les solutions de (2) sont les fonctions de la forme  $t \mapsto \frac{\lambda + \mu t}{1 + t^2}$ , pour des constantes  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  quelconques.

### Exercice 2.3.4.

Justifier le développement en série entière suivant, et donner son rayon de convergence :

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n.$$

En déduire la valeur de  $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n$ , lorsque cette série converge. Résoudre l'équation différentielle

$$(1-x)^2 y''(x) - 4(1-x)y'(x) + 2y(x) = 0,$$

en cherchant ses solutions développables en série entière.

### c. Changement de variable

On pourra parfois suggérer un changement de variable dans l'équation. Cela revient à considérer une nouvelle fonction  $z$  (souvent d'une autre variable que celle de  $y$ ), montrer qu'elle est solution d'une autre équation différentielle, et à résoudre cette dernière.

### Exemple 2.3.5.

Réolvons sur  $\mathbb{R}_+^*$  l'équation différentielle

$$4xy''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0, \quad (3)$$

en posant  $x = t^2$ .

On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse : on suppose que la fonction  $y : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  est solution, et l'on introduit la fonction  $u : t \mapsto y(t^2)$ . Pour  $x > 0$ , on a donc  $y(x) = u(\sqrt{x})$ . En tant que composée de fonctions deux fois dérivables,  $u$  est dérivable, et si  $x > 0$  :

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{u'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} \\ y''(x) &= \frac{u''(\sqrt{x})}{4x} - \frac{u'(\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

On injecte ceci dans l'équation :

$$\begin{aligned} 4xy''(x) + 2y'(x) + y(x) &= u''(\sqrt{x}) - \frac{u'(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} + \frac{u'(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} + u(\sqrt{x}) \\ &= u''(\sqrt{x}) + u(\sqrt{x}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout  $t > 0$ ,  $u''(t) + u(t) = 0$ . On en déduit que  $u$  est solution de l'équation  $z'' + z = 0$ .

On sait résoudre cette équation :  $u$  est de la forme  $t \mapsto a \sin(t) + b \cos(t)$ , donc  $y$  est de la forme  $x \mapsto a \sin(\sqrt{x}) + b \cos(\sqrt{x})$ .

Synthèse : on vérifie que les deux fonctions  $x \mapsto \sin(\sqrt{x})$  et  $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$  sont solutions de l'équation différentielle de départ.

Conclusion : on vient donc de trouver deux solutions non proportionnelles de cette équation différentielle homogène. Ses solutions sont donc les fonctions de la forme  $x \mapsto a \cos(\sqrt{x}) + b \sin(\sqrt{x})$ .

### Remarque 2.3.6.

En considérant  $y : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  et  $u : t \mapsto y(t^2)$ , on pouvait aussi démontrer que  $y$  est solution de (3) si et seulement si  $u$  est solution sur  $\mathbb{R}_+^*$  de  $u'' + u = 0$ , par exemple en raisonnant par double implication. Cela permet de se passer de l'étape de synthèse.

### Exercice 2.3.7.

Résoudre l'équation différentielle

$$ty''(t) - (1 + 4t^2)y'(t) + 4t^3y(t) = 0$$

en posant  $x = t^2$ .

## 2.4. Abaissement du degré

Lorsqu'aucune méthode particulière n'est suggérée, et lorsqu'une solution de l'équation homogène  $h$ , ne s'annulant pas, a été obtenue au préalable, alors on pourra procéder par abaissement du degré, en utilisant l'idée de la méthode de la variation de la constante. Cela permet de résoudre entièrement l'équation ( $\mathcal{E}$ ).

### Lemme 2.4.1.

Soit  $h$  une solution de ( $\mathcal{H}$ ) ne s'annulant jamais, soit  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ , considérons la fonction  $C = \frac{y}{h}$ .

Alors,  $y$  est deux fois dérivable si et seulement si  $C$  l'est.

### Démonstration.

Si  $y$  est deux fois dérivable, alors  $C$  est deux fois dérivable comme quotient de deux fonctions qui le sont.

Réciproquement, si  $C$  est deux fois dérivable, alors  $y$  est deux fois dérivable comme produit de deux fonctions qui le sont.  $\square$

Le lemme précédent indique que, sous réserve de l'existence d'un telle  $h$ , sans perte de généralité, on peut chercher une solution  $y$  de ( $\mathcal{E}$ ) sous la forme  $y : x \mapsto C(x)h(x)$ , où  $C$  est une fonction deux fois dérivable.

**Théorème 2.4.2.**

Soit  $h : I \rightarrow \mathbb{K}$  une solution de l'équation homogène  $(\mathcal{H})$  ne s'annulant jamais. Soit  $C : I \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction deux fois dérivable. Soit  $y : x \mapsto C(x)h(x)$ .

Alors,  $y$  est solution de  $(\mathcal{E})$  si et seulement si  $C'$  est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, que l'on sait déterminer.

**Démonstration.**

La fonction  $y$  est deux fois dérivable, comme produit de deux fonctions qui le sont aussi. On dérive successivement

$$y'(x) = C'(x)h(x) + C(x)h'(x)$$

et

$$y''(x) = C''(x)h(x) + 2C'(x)h'(x) + C(x)h''(x),$$

ce qui donne pour tout  $x \in I$  :

$$\begin{aligned} y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) &= C''(x)h(x) + 2C'(x)h'(x) + C(x)h''(x) \\ &\quad + C''(x)h(x) + C'(x)(2h'(x) + h(x)) \\ &= C''(x)h(x) + C'(x)(2h'(x) + h(x)). \end{aligned}$$

Ainsi,  $y$  est solution de  $(\mathcal{E})$  si et seulement si pour tout  $x \in I$  :

$$C''(x)h(x) + C'(x)(2h'(x) + h(x)) = c(x),$$

ce qui, vu que  $h$  ne s'annule pas, peut être mis sous la forme d'une équation différentielle d'ordre 1 sur  $C'$ .  $\square$

**Remarque 2.4.3.**

On ne retiendra pas la formule obtenue dans cette démonstration, mais on refera systématiquement ce calcul.

**Exercice 2.4.4.**

On étudie sur  $\mathbb{R}_+^*$  l'équation

$$y'' - 3\frac{y'}{t} + 4\frac{y}{t^2} = t. \quad (4)$$

1. Chercher une solution de l'équation homogène associée à (4) sur  $\mathbb{R}_+^*$  de la forme  $y : t \mapsto t^\alpha$ .
2. Avec le paramètre  $\alpha$  déterminé précédemment et en posant  $y : t \mapsto C(t)t^\alpha$ , montrer que  $y$  est solution de (4) si et seulement si  $C'$  est solution d'une équation  $(\mathcal{F})$ , que l'on déterminera.
3. Résoudre  $(\mathcal{F})$ .
4. Primitiver les solutions de  $(\mathcal{F})$  ainsi obtenues, et en déduire toutes les solutions de (4).

Il existe un cas où les solutions de l'équation homogène sont connues : quand les coefficients  $a$  et  $b$  sont constants ! Il suffit alors uniquement de trouver une solution particulière.

**Exercice 2.4.5.**

On considère sur  $\mathbb{R}$  l'équation

$$y'' - 3y' + 2y = (1 - t)e^t. \quad (5)$$

1. Déterminer les solutions de l'équation homogène de (5).
2. Choisir judicieusement une solution de l'équation homogène  $h$ , et montrer que si  $y : t \mapsto C(t)h(t)$ , alors  $y$  est solution de (5) si et seulement si  $C'$  est solution d'une équation  $(\mathcal{F})$  particulièrement simple, que l'on déterminera.
3. Trouver une solution de  $(\mathcal{F})$ , la primitiver, et en déduire une solution particulière de (5).
4. Écrire la forme générale des solutions de (5).

### 3. Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants

**3.1. Généralités**

Soit le système différentiel

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) \end{cases},$$

où  $a_{11}, \dots, a_{nn}$  sont des coefficients réels ou complexes, et où  $x_1, \dots, x_n$  sont des fonctions réelles dérivables.

Si l'on pose  $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$  et

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),$$

alors ce système différentiel s'écrit comme une équation différentielle d'ordre 1 en la variable vectorielle  $X$  :

$$X' = AX. \quad (\mathcal{S})$$

**Exemple 3.1.1.**

Avec  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ , le système différentiel

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 \\ x_2' = x_1 + x_2 \end{cases}$$

s'écrit matriciellement :  $X' = AX$ .

**Exercice 3.1.2.**

Écrire le système différentiel suivant sous forme matricielle.

$$\begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = -x + y \end{cases}$$

**Définition 3.1.3.**

Une fonction  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n$  est une solution de  $(\mathcal{S})$  si  $X$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et si

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = AX(t).$$

**Définition 3.1.4.**

Un problème de Cauchy associé au système  $(\mathcal{S})$  est la donnée conjointe de ce système et d'une condition initiale du type  $X(t_0) = X_0$ , où  $t_0 \in \mathbb{R}$  et où  $X_0 \in \mathbb{K}^n$ .

Résoudre ce problème de Cauchy, c'est trouver une solution  $X$  de  $(\mathcal{S})$  vérifiant  $X(t_0) = X_0$ .

**Théorème 3.1.5** (de Cauchy).

Soit  $t_0 \in \mathbb{R}$  et  $X_0 \in \mathbb{K}^n$ , il existe une unique fonction  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n$  solution du problème de Cauchy associé à  $(\mathcal{S})$ , avec la condition initiale  $X(t_0) = X_0$ .

**Démonstration.**

Admis

□

**Corollaire 3.1.6.**

L'ensemble des solutions de  $X' = AX$  est un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$ .

**Démonstration.**

Notons  $\mathcal{S}$  l'ensemble des solutions. C'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{K}^n$  (cela se montre aisément).

De plus, si  $t_0 \in \mathbb{R}$ , alors l'application  $\varphi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{K}^n$  définie par  $\varphi(X) = X(t_0)$  est un isomorphisme, d'après le théorème de Cauchy. On en déduit que  $\dim \mathcal{S} = \dim \mathbb{K}^n = n$ . □

**3.2. Cas où  $A$  est diagonalisable**

Dans le cas où  $A$  est diagonalisable, le système se résout aisément (nonobstant la diagonalisation de  $A$ ). Commençons par un exemple.

**Exercice 3.2.1.**

On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x' &= -8x + 18y \\ y' &= -3x + 7y \end{cases} \quad (\mathcal{S})$$

1. Pour  $x, y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables, on pose  $u = -x + 3y$  et  $v = x - 2y$ . Montrer que  $(x, y)$  est solution de  $(\mathcal{S})$  si et seulement si  $u$  et  $v$  sont chacune solutions d'une équation différentielle d'ordre 1.
2. Résoudre ces deux équations différentielles, et donner la forme des solutions de  $(\mathcal{S})$ .

3. Écrire  $(\mathcal{S})$  sous une forme matricielle du type  $X' = AX$ .

4. Diagonaliser  $A$ . Que remarque-t-on ?

Nous pouvons généraliser ce qui vient d'être fait. Commençons par observer cela d'un point de vue matriciel.

Soit  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  diagonale et  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  telles que  $A = PDP^{-1}$ .

On notera

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

On notera  $C_1, \dots, C_n$  les colonnes de  $P$ .

Rappelons que  $C_1, \dots, C_n$  forment une base de vecteurs propres de  $A$ , associés respectivement aux valeurs propres  $d_1, \dots, d_n$ .

**Lemme 3.2.2.**

Soit  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n$ , posons  $Y : t \mapsto P^{-1}X(t)$ . Alors,  $X$  est solution de  $\mathcal{S}$  si et seulement si  $Y$  est solution du système différentiel

$$Y' = DY.$$

**Démonstration.**

La formule du produit matriciel montre que  $X$  est dérivable si et seulement si  $Y$  l'est, et que, le cas échéant,  $Y' = P^{-1}X'$  et  $X' = PY'$ . On a alors immédiatement

$$\begin{aligned} X' = AX &\Leftrightarrow X' = PDP^{-1}X \\ &\Leftrightarrow P^{-1}X' = DP^{-1}X \\ &\Leftrightarrow Y' = DY. \end{aligned}$$

□

**Lemme 3.2.3.**

Les solutions du système différentiel  $Y' = DY$  sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \mu_1 e^{d_1 t} \\ \vdots \\ \mu_n e^{d_n t} \end{pmatrix},$$

où  $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$  sont des constantes.

**Démonstration.**

Le système  $Y' = DY$  s'écrit

$$\begin{cases} y'_1 &= d_1 y_1 \\ \vdots & \\ y'_n &= d_n y_n \end{cases},$$

qui se résout immédiatement en la forme proposée. □

**Exercice 3.2.4.**

Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' &= 5x - 6y \\ y' &= 3x - 4y \end{cases}.$$

**Exercice 3.2.5.**

Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' &= -4x + 4z \\ y' &= 8x + y - 10z \\ z' &= -3x + 3z \end{cases}.$$

**Exercice 3.2.6.**

Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' &= x - 9y - 9z \\ y' &= 10y + 9z \\ z' &= -12y - 11z \end{cases}.$$

**Remarque 3.2.7** (méthodologie).

Pour résoudre le système différentiel  $X' = AX$ , il n'y a pas besoin de calculer  $P^{-1}$ .

On suivra donc les étapes suivantes, lorsque  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est diagonalisable.

- ▷ Diagonaliser  $A$ , en obtenant  $P$  et  $D$ .
- ▷ Prendre  $X : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  dérivable, poser  $Y = PX$ .
- ▷ Rappeler que  $X' = AX \Leftrightarrow Y' = DY$ .
- ▷ Résoudre  $Y' = DY$ , en faisant apparaître  $n$  paramètres réels.
- ▷ Calculer  $X = PY$ , où  $Y$  est de la forme précédente.

**Théorème 3.2.8** (cas diagonalisable, HP).Les solutions de  $(\mathcal{S})$  sont les fonctions de la forme

$$X : t \mapsto \mu_1 e^{d_1 t} C_1 + \cdots + \mu_n e^{d_n t} C_n,$$

où  $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$  sont des constantes.**Démonstration.**

En notant  $E_1, \dots, E_n$  la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ , le lemme précédent indique que les solutions du système différentiel  $Y' = DY$  sont les fonctions de la forme

$$Y : t \mapsto \mu_1 e^{d_1 t} E_1 + \cdots + \mu_n e^{d_n t} E_n,$$

où  $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$ 

Rappelons que pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,  $PE_i = C_i$ .

De plus, les solutions de  $(\mathcal{S})$  sont les fonctions  $X$  de la forme  $PY$ , où  $Y$  est solution du système  $Y' = DY$ . Ce sont donc les fonctions de la forme

$$\begin{aligned} X(t) &= P(\mu_1 e^{d_1 t} E_1 + \cdots + \mu_n e^{d_n t} E_n) \\ &= \mu_1 e^{d_1 t} PE_1 + \cdots + \mu_n e^{d_n t} PE_n \\ &= \mu_1 e^{d_1 t} C_1 + \cdots + \mu_n e^{d_n t} C_n. \end{aligned}$$

□

Nous pouvons aussi retrouver cela d'un point de vue vectoriel. Commençons par remarquer que les éléments propres de  $A$  fournissent automatiquement des solutions de  $\mathcal{S}$ .

**Proposition 3.2.9** (HP).

Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $v_0 \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ . On considère l'application  $\varphi : t \mapsto e^{\lambda t} v_0$ .

Alors  $\varphi$  est solution de  $(\mathcal{S})$  si et seulement si  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$  et  $v_0$  un vecteur propre de  $A$ , associé à  $\lambda$ .

**Démonstration.**

$\varphi$  est solution de  $(\mathcal{S})$  si et seulement si l'on a

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi'(t) = A\varphi(t).$$

Or, si  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\varphi'(t) = \lambda e^{\lambda t} v_0.$$

On a donc que  $\varphi$  est solution de  $(\mathcal{S})$  si et seulement si

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \lambda e^{\lambda t} v_0 = A e^{\lambda t} v_0,$$

ce qui, vu que  $e^{\lambda t} v_0 \neq 0$ , équivaut à  $\lambda v_0 = A v_0$ . □**Théorème 3.2.10** (cas diagonalisable, HP).

Si  $A$  est diagonalisable, soit  $(v_1, \dots, v_n)$  une base de  $\mathbb{R}^n$  constituée de vecteurs propres de  $A$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres correspondantes.

Alors, les fonctions solutions de  $(\mathcal{S})$  sont les fonctions de la forme

$$X : t \mapsto \mu_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \cdots + \mu_n e^{\lambda_n t} v_n,$$

où  $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$  sont des constantes.**Démonstration.**

On sait d'après le théorème de Cauchy que  $\mathcal{S}$  est un  $\mathbb{R}$ -ev de dimension  $n$ . Or la proposition 3.2.9 nous donne  $n$  solutions, de la forme  $t \mapsto e^{\lambda_i t} v_i$ . Il suffit de montrer que ces solutions forment une famille libre.

Soit  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ . On suppose que la fonction

$$t \mapsto \alpha_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \cdots + \alpha_n e^{\lambda_n t} v_n$$

est constamment nulle. Alors, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\alpha_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \cdots + \alpha_n e^{\lambda_n t} v_n = 0,$$

mais comme la famille  $(v_1, \dots, v_n)$  est libre, alors  $\alpha_1 e^{\lambda_1 t} = \cdots = \alpha_n e^{\lambda_n t} = 0$ , d'où  $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ . □

**3.3. Cas où  $A$  est trigonalisable**

On suppose que  $A$  est trigonalisable.

Soit  $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  triangulaire supérieure et  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  telles que  $A = PTP^{-1}$ .

On utilise alors le lemme suivant.

**Lemme 3.3.1.**

Soit  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n$ , posons  $Y : t \mapsto P^{-1}X(t)$ . Alors,  $X$  est solution de  $\mathcal{S}$  si et seulement si  $Y$  est solution du système différentiel

$$Y' = TY.$$

**Démonstration.**

C'est la même chose pour le lemme 3.2.2.  $\square$

La résolution du système  $Y' = TY$  est facile, car dans la dernière ligne une équation différentielle portant uniquement sur  $y_n$  apparaît. On la résout, et l'on injecte ensuite sa solution dans les lignes précédentes pour trouver les solutions les unes après les autres.

**Exercice 3.3.2.**

Trouver les solutions du système différentiel

$$\begin{cases} u' &= 2u + v \\ v' &= 2v \end{cases}$$

vérifiant les conditions initiales  $u(0) = 1$  et  $v(0) = -1$ .

En déduire les solutions du système différentiel

$$\begin{cases} x' &= x + y \\ y' &= -x + 3y \end{cases},$$

vérifiant  $x(0) = 0$  et  $y(0) = -1$ , en posant  $u = 2x - y$  et  $v = -x + y$ .

Écrire ce système sous la forme  $X' = AX$  et trigonaliser  $A$ . Pourquoi a-t-on posé  $u$  et  $v$  sous cette forme ?

**Exercice 3.3.3.**

Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' &= -x + 9y \\ y' &= -x + 5y \end{cases}.$$

Enfin, si  $A$  est une matrice réelle non trigonalisable, on sait qu'elle est trigonalisable sur  $\mathbb{C}$  car tous les polynômes à coefficients complexes sont scindés. On utilise alors le paragraphe précédent pour trouver toutes les solutions *complexes* de l'équation différentielle. On conclut alors à l'aide du lemme suivant.

**Lemme 3.3.4.**

Si  $X$  est une solution à valeurs complexes du système différentiel  $(\mathcal{S})$  où  $A$  est à coefficients *réels*, alors  $\operatorname{Re}(X)$  et  $\operatorname{Im}(X)$  sont des solutions (réelles) du même système.

**Démonstration.**

$A$  est à coefficients réels donc  $\operatorname{Re}(AX) = A\operatorname{Re}(X)$ ; par ailleurs  $\operatorname{Re}(X') = \operatorname{Re}(X)'$ , donc  $\operatorname{Re}(X)' = A\operatorname{Re}(X)$ . On procède de même pour  $\operatorname{Im}(X)$ .  $\square$

**3.4. Lien avec les équations différentielles linéaires d'ordre supérieur**

Soit l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre  $n$

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0, \quad (\mathcal{E})$$

de la variable fonctionnelle  $y$  et où  $a_0, \dots, a_{n-1}$  sont des constantes.

**Définition 3.4.1.**

Une fonction  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$  est une solution de  $(\mathcal{E})$  si  $y$  est  $n$  fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et si pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1y'(t) + a_0y(t) = 0.$$

**Théorème 3.4.2.**

Soit  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction  $n$  fois dérivable. Posons

$$X : t \mapsto \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-2)}(t) \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

et la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Alors,  $y$  est solution de  $(\mathcal{E})$  si et seulement si  $X$  est solution du système différentiel

$$X' = AX.$$

**Démonstration.**

Il suffit de voir que

$$X' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \\ y^{(n)} \end{pmatrix}$$

et que

$$AX = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \\ -a_{n-1}y^{(n-1)} - \cdots - a_1y' - a_0y \end{pmatrix}.$$

Ainsi,  $AX = X'$  si et seulement si

$$y^{(n)} = -a_{n-1}y^{(n-1)} - \dots - a_1y' - a_0y,$$

ce qui est bien équivalent au fait que  $y$  est solution de  $(\mathcal{E})$ .  $\square$

### Corollaire 3.4.3.

L'ensemble des solutions de  $(\mathcal{E})$  est un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$ .

### Exemple 3.4.4.

Considérons l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 :

$$y'' + ay' + by = 0. \quad (\mathcal{E}_2)$$

Avec

$$X = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix},$$

alors  $y$  est solution de  $(\mathcal{E}_2)$  si et seulement si  $X$  est solution du système  $X' = AX$ .

Or,

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ b & \lambda + a \end{vmatrix} = \lambda^2 + a\lambda + b.$$

On retrouve l'équation *caractéristique* de  $(\mathcal{E}_2)$ , telle que vu en première année.

Si  $\chi_A$  admet deux racines distinctes  $\lambda_1, \lambda_2$ , alors  $A$  sera diagonalisable. Il existera donc une matrice  $P$  inversible telle que  $A = PDP^{-1}$ , où

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Nous savons que les solutions de l'équation  $Y' = DY$  sont les fonctions de la forme

$$Y : t \mapsto \begin{pmatrix} \mu_1 e^{\lambda_1 t} \\ \mu_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix},$$

et après multiplication par  $P$  on obtient que les solutions du système  $X' = AX$  sont les fonctions de la forme

$$X : t \mapsto \begin{pmatrix} \alpha e^{\lambda_1 t} + \beta e^{\lambda_2 t} \\ * \end{pmatrix}.$$

On obtient donc bien la forme des solutions données en première année.

$\chi_A$  admet une racine double  $\lambda$ , vu que  $A \neq \lambda I_2$ , alors  $A$  sera trigonalisable. On peut montrer qu'il existe une matrice  $P$  inversible telle que  $A = PTP^{-1}$ , où

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

On montre (voir exercice 3.3.2 pour un exemple) que les solutions de l'équation  $Y' = TY$  sont les fonctions de la forme

$$Y : t \mapsto \begin{pmatrix} \mu_1 t e^{\lambda t} + \mu_2 e^{\lambda t} \\ \mu_3 e^{\lambda t} \end{pmatrix},$$

et après multiplication par  $P$  on obtient que les solutions du système  $X' = AX$  sont les fonctions de la forme

$$X : t \mapsto \begin{pmatrix} \alpha e^{\lambda t} + \beta t e^{\lambda t} \\ * \end{pmatrix}.$$

On obtient donc bien la forme des solutions données en première année.

### Remarque 3.4.5 (limite HP).

On peut montrer que le polynôme caractéristique de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & \dots & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

est

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0.$$

L'équation  $\chi_A(\lambda) = 0$  est appelée *équation caractéristique* de  $(\mathcal{E})$ .

Si cette équation admet  $n$  racines distinctes  $r_1, \dots, r_n$ , la matrice  $A$  est alors diagonalisable et les solutions sont alors les fonctions de la forme

$$t \mapsto \mu_1 e^{r_1 t} + \dots + \mu_n e^{r_n t},$$

où  $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$  sont des constantes quelconques.

### Exercice 3.4.6.

On considère l'équation

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0. \quad (\mathcal{E}_3)$$

1. Déterminer une matrice  $A$  et un vecteur  $X$  tels que  $(\mathcal{E}_3)$  soit équivalente au système différentiel  $X' = AX$ .
2. Diagonaliser  $A$ .
3. En écrivant  $A = PDP^{-1}$ , où  $P$  est inversible et où  $D$  est diagonale, résoudre le système différentiel  $Y' = DY$ , et en déduire les solutions du système différentiel  $X' = AX$ .
4. Donner la forme des solutions de  $(\mathcal{E}_3)$ .

### Exercice 3.4.7.

Sur le modèle de l'exercice précédent, résoudre les équations différentielles suivantes.

1.  $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0$

$$2. y''' - 3y' + 2y = 0$$

Pour la deuxième équation, montrer que  $A$  est semblable à une matrice de la forme

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

## 4. Méthodes numériques

### 4.1. Généralités

Cette partie n'est pas *stricto sensu* au programme de mathématiques, mais vous risquez d'être interrogés dessus à l'oral. Voici donc quelques rudiments de résolution d'équations différentielles avec Python.

La bibliothèque la plus utilisée pour résoudre des équations différentielles est `scipy.integrate`. Cette bibliothèque contient des fonctions de calcul approché d'intégrales, et une fonction de résolution approchée d'équations différentielles : `odeint`.

Cette fonction permet de résoudre l'équation différentielle vectorielle

$$X'(t) = F(X(t), t),$$

de la variable vectorielle  $X$ . Ici,  $X$  est donc une fonction à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , et  $F$  est une fonction à variables dans  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ .

#### Exemple 4.1.1.

L'équation

$$y' + 3ty = e^t$$

correspond à la fonction

$$F : (x, t) \mapsto e^t - 3tx.$$

L'équation

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x(t) + 3ty(t) \\ x(t) + e^t \end{pmatrix}$$

correspond à la fonction

$$F : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, t \mapsto \begin{pmatrix} 2x + 3ty \\ x + e^t \end{pmatrix}.$$

#### Remarque 4.1.2.

Les systèmes linéaires résolus dans ce cours sont à coefficients constants, la fonction  $F$  associée sera donc constante en fonction du temps.

Par exemple, le système différentiel

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - y \\ 2x + y \end{pmatrix}$$

correspond à la fonction

$$F : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, t \mapsto \begin{pmatrix} 3x - y \\ 2x + y \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs seront implémentés par les objets de type `array` de `numpy`.

Dans son utilisation la plus simple, la fonction `odeint` prend trois arguments :

- ▷ une fonction  $F$ , qui prend elle-même en argument un vecteur  $X$  et un flottant  $t$ , et renvoie  $F(X, t)$  ;
- ▷ un vecteur  $y0$  (condition initiale) ;
- ▷ une liste de temps  $t$ .

Cette fonction renvoie une liste de vecteurs de même longueur que  $t$ . Si

$$t = [t_0, \dots, t_{n-1}],$$

alors un appel de `odeint(F, t0, t)` renvoie une liste

$$X = [X_0, \dots, X_{n-1}]$$

où  $X_0, \dots, X_{n-1}$  sont des approximations de la solution du problème de Cauchy

$$X'(t) = F(X(t), t), \quad X(t_0) = y0.$$

### 4.2. Exemple : équation d'ordre 1

On résout l'équation  $y'(t) = t \sin(y(t))$ , avec la condition initiale  $y(0) = 1$ , sur l'intervalle de temps  $[0, 4]$ .

Ici, on a  $F : (x, t) \mapsto t \sin(x)$ .

On peut donc utiliser tout simplement la fonction `odeint`.

```
1 import numpy as np
2 from scipy.integrate import odeint
3 import matplotlib.pyplot as plt
4
5 def F(x, t):
6     return t*np.sin(x)
7
8 y0=1.
9 t_vec = np.linspace(0,4)
10 X_vec = odeint(F, y0, t_vec)
11
12 plt.clf()
13 plt.plot(t_vec, X_vec)
14 plt.grid()
15 plt.axis("equal")
16 plt.show()
```

On obtient alors le tracé suivant (voir figure 1).

### 4.3. Exemple : équation d'ordre 2

On considère l'équation régissant les oscillations du pendule simple (en reprenant les notations physiques) :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0,$$

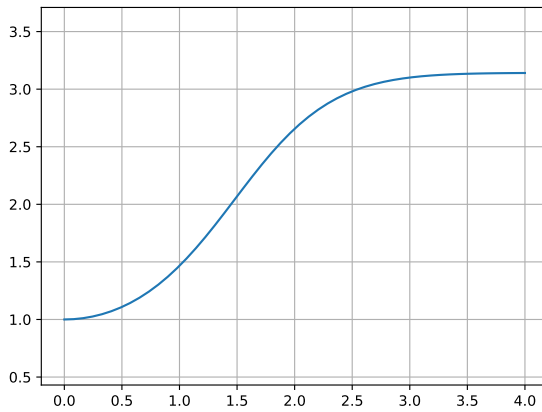


FIGURE 1 – Résolution approchée de  $y'(t) = t \sin(y(t))$  par `odeint`

où  $\omega_0$  est la pulsation propre du système (on a  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ , où  $g$  est l'accélération de la pesanteur et où  $\ell$  est la longueur du pendule).

On prendra  $\ell = 1$  m,  $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$  et les conditions initiales  $\theta(0) = \frac{\pi}{3}$  et  $\dot{\theta}(0) = 0 \text{ s}^{-1}$ .

Ici, on vectorialise le problème en  $X(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix}$ , soit

$$X'(t) = \begin{pmatrix} \dot{\theta}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}(t) \\ -\omega_0^2 \sin(\theta(t)) \end{pmatrix}$$

On a donc

$$F : \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, t \right) \mapsto \begin{pmatrix} y \\ -\omega_0^2 \sin(x) \end{pmatrix}.$$

```

17 import numpy as np
18 from scipy.integrate import odeint
19 import matplotlib.pyplot as plt
20
21 l = 1 #m
22 g = 9.81 #ms**-2
23 omega0 = np.sqrt(g/l)
24
25 X0 = np.array([np.pi/3, 0.])
26
27 def F(X,t):
28     x,y = X
29     return np.array([y, -omega0**2*
30                      ↪ np.sin(x)])
31
32 t_vec = np.linspace(0,10,num=100)
33 X_vec = odeint(F,X0,t_vec)
```

Remarquons qu'alors  $X\_vec$  est un vecteur (que l'on peut voir comme une liste), dont les composantes sont des vecteurs de la forme  $\begin{pmatrix} \theta_i \\ \dot{\theta}_i \end{pmatrix}$ . Afin de

tracer la trajectoire, ou bien un portrait de phase, il convient de récupérer au préalable les premières coordonnées de ces vecteurs (les angles) et les secondes coordonnées (les vitesses angulaires).

```

33 Theta_liste = [X[0] for X in X_vec]
34 Thetap_liste = [X[1] for X in X_vec
35                  ↪ ]
```

On peut alors tracer l'évolution de l'angle  $\theta$  en fonction du temps (voir figure 2).

```

35 plt.clf()
36 plt.plot(t_vec, Theta_liste)
37 plt.grid()
38 plt.axis("equal")
39 plt.show()
```

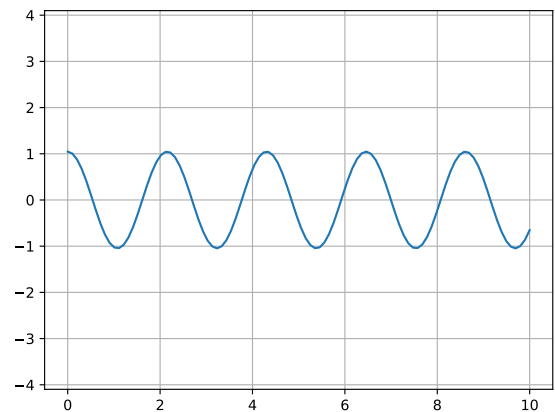


FIGURE 2 – Pendule simple : trajectoire angulaire

On peut aussi le portrait de phase ( $\dot{\theta}$  en fonction de  $\theta$ ) (voir figure 3).

```

40 plt.clf()
41 plt.plot(Theta_liste, Thetap_liste)
42 plt.grid()
43 plt.axis("equal")
44 plt.show()
```

#### 4.4. Méthode d'Euler

La méthode d'Euler est la méthode numérique la plus élémentaire permettant de déterminer des solutions approchées d'une équation différentielle d'ordre 1, que l'on écrit

$$X'(t) = F(X(t), t), \quad (\mathcal{E})$$

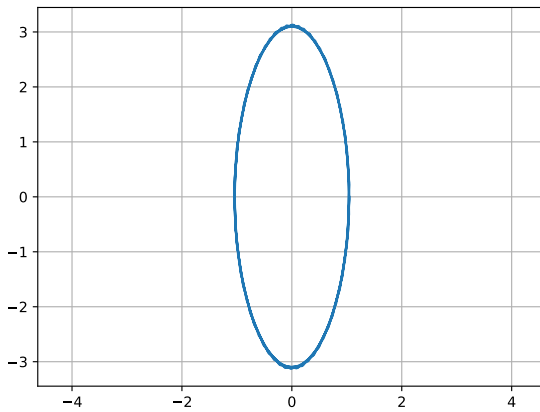


FIGURE 3 – Pendule simple : portrait de phase

avec la condition  $X(t_0) = X_0$ . Ici,  $X$  est une fonction vectorielle, mais nous la représenterons comme une fonction réelle.

Pour  $t = t_0$ , on connaît la valeur de la solution : c'est  $X_0$ . On essaie maintenant de trouver une valeur approchée de  $X(t_1)$ , où  $t_1 > t_0$ . On pourra noter  $h = t_1 - t_0$ , *i.e.*  $t_1 = t_0 + h$ . Cette quantité  $h$  est le pas temporel.

L'idée de la méthode d'Euler est d'approcher la courbe de la solution  $X$ , inconnue, par sa tangente (voir figure 4). On sait en effet que sa tangente passe par le point de coordonnées  $(t_0, X_0)$  et est de pente

$$X'(t_0) = F(X_0, t_0).$$

Le point de cette tangente d'abscisse  $t_1 = t_0 + h$  a pour ordonnée

$$X_1 = X_0 + hF(X_0, t_0).$$

On itère alors ce processus. Si les temps  $t_0, \dots, t_n$  sont prescrits, comme pour `odeint`, on pose pour tout  $0 \leq i < n$  :

$$h_i = t_{i+1} - t_i,$$

et l'on a alors

$$X_{i+1} = X_i + h_i F(X_i, t_i).$$

Si le pas temporel  $h$  est fixé, on a alors pour tout  $i$  :

$$t_i = t_0 + ih,$$

et alors

$$X_{i+1} = X_i + hF(X_i, t_i).$$

Si l'on subdivise l'intervalle de résolution  $[a, b]$  en  $n$  segments, cela revient à prendre un pas constant  $h = \frac{b-a}{n}$ .

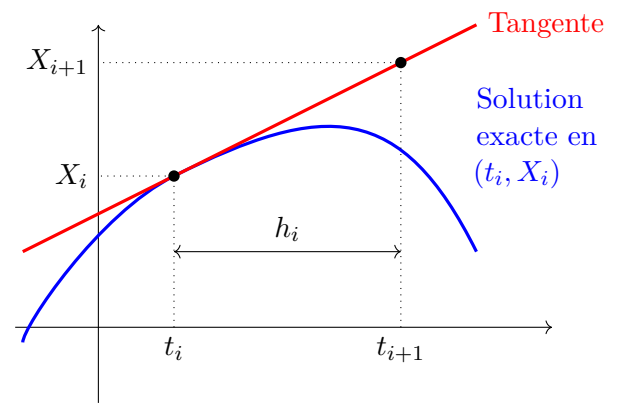


FIGURE 4 – Représentation de la méthode d'Euler

Dans tous les cas, on peut simplement écrire une fonction qui effectue ce calcul, et renvoie en sortie la liste des positions  $[X_0, \dots, X_n]$ .

Voici un premier exemple ayant les mêmes spécifications que la fonction `odeint`, *i.e.* qui prend en argument la fonction  $F$ , la condition initiale  $X_0$  (que l'on suppose vectorielle) et la liste des temps  $t$ .

```

45 def euler(F,X0,t) :
46     X = X0
47     L = [X]
48     n = len(t)
49     for i in range(1,n) :
50         h = t[i]-t[i-1]
51         X = X+h*F(X,t[i-1])
52         L.append(X)
53     return L

```

On peut aussi écrire cela en fonction du nombre  $n$  de points que l'on utilise pour subdiviser régulièrement le segment  $[a, b]$ . On a alors le pas de temps  $h = \frac{b-a}{n}$  et l'on va calculer cela en les temps  $t_i = a + ih$ .

```

54 def euler(F,X0,a,b,n) :
55     h = (b-a)/n
56     X = X0
57     L = [X]
58     for i in range(n-1) :
59         t = a + i*h
60         X = X+h*F(X,t)
61         L.append(X)
62     return L

```