

VIII Séries entières

1 Convergence d'une série entière

Définition 1.0.1.

On appelle *série entière* toute série de la forme $\sum a_n z^n$, où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle ou complexe de *coefficients*, et $z \in \mathbb{C}$ une *variable*.

Remarque 1.0.2.

On peut se restreindre au cas où la variable est réelle, et, dans ce cas, on note traditionnellement cette variable x plutôt que z .

Pour une même suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la série $\sum a_n z^n$ peut être convergente ou divergente suivant la valeur de z .

Exercice 1.0.3.

Étudier la convergence des séries entières suivantes, selon la valeur de z .

$$1. \sum z^n \qquad 2. \sum \frac{z^n}{n!}$$

Remarque 1.0.4.

Quel que soit a_n , on a toujours pour $n \geq 1$: $a_n 0^n = 0$. Ainsi, pour $z = 0$, la série $\sum a_n z^n$ converge toujours, et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = a_0$.

On étudiera donc la nature de cette série pour $z \neq 0$.

Remarque 1.0.5.

Le terme général de la série n'est pas toujours défini explicitement pour les premiers entiers, comme par exemple pour la série $\sum \frac{z^n}{n}$. On considérera alors que les coefficients non écrits sont égaux à 0.

Ici, on a par exemple $a_0 = 0$.

Lemme 1.0.6 (Lemme d'Abel).

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On suppose qu'il existe $r > 0$ tel que la suite $(a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée. Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$, si $|z| < r$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Démonstration.

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < r$. Notons M un majorant de la suite $(|a_n r^n|)_{n \in \mathbb{N}}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq |a_n z^n| = |a_n r^n| \times \left(\frac{|z|}{r}\right)^n \leq M \left(\frac{|z|}{r}\right)^n,$$

mais $|z| < r$ donc la série $\sum (|z|/r)^n$ est géométrique de raison $0 \leq \frac{|z|}{r} < 1$, elle est donc convergente. D'après le théorème

de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum |a_n z^n|$ est donc convergente, autrement dit la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente. $\square$

Définition 1.0.7 (voir figure 1).

Pour toute série entière $\sum a_n z^n$, il existe un unique nombre $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

- ▷ si $|z| < R$, alors $\sum a_n z^n$ est absolument convergente ;
- ▷ si $|z| > R$, alors $\sum a_n z^n$ est grossièrement divergente.

Notamment, on a, dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$,

$$\begin{aligned} R &= \sup \{ r \in \mathbb{R}_+ \mid \sum a_n r^n \text{ converge} \} \\ &= \sup \{ r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{la suite } (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \}. \end{aligned}$$

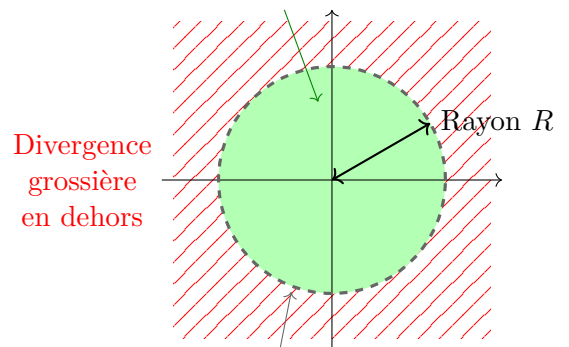
Le nombre R est appelé *rayon de convergence* de la série entière.

Le disque $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$ (resp. l'intervalle $] -R; R[$) est appelé *disque ouvert de convergence* (resp. *intervalle ouvert de convergence*).

Démonstration.

Il suffit de considérer l'ensemble $\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ bornée}\}$, R est alors sa borne supérieure. En effet, pour tout $z \in \mathbb{C}$, si $|z| > R$, alors $(a_n |z|^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée donc ne tend pas vers 0. C'est donc également le cas de la suite $(a_n z^n)$. Ainsi, $\sum a_n z^n$ est grossièrement divergente. $\square$

Disque ouvert de convergence (absolue)



Comportement inconnu sur le cercle

FIGURE 1 – Domaine de convergence d'une série entière de rayon $R < +\infty$

Remarque 1.0.8.

En notant R le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ et $z \in \mathbb{C}$:

▷ si $\sum a_n z^n$ converge, alors $R \geq |z|$;

▷ si $\sum a_n z^n$ diverge, alors $R \leq |z|$.

Exemple 1.0.9.

La série $\sum n z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$.

En effet, si $0 < r < 1$, alors $n^3 r^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $n r^n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum n r^n$ converge, donc $R \geq 1$. On pouvait aussi voir que $n r^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc la série $\sum n r^n$ ne diverge pas grossièrement, donc $R \geq 1$.

De plus, $\sum n 1^n$ diverge, donc $R \leq 1$.

Ainsi, $R = 1$.

Exercice 1.0.10.

Déterminer le rayon de convergence des séries entières de l'exercice 1.0.3. Déterminer le rayon de convergence de $\sum \frac{z^n}{n}$ et $\sum (n!) z^n$.

Remarque 1.0.11.

Si $|z| = R$, on ne peut rien dire en général et il faut étudier au cas par cas.

Exercice 1.0.12.

Étudier la convergence de $\sum \frac{z^n}{n}$ pour $z = 1$ et $z = -1$. À chaque fois, en déduire le rayon de convergence de la série $\sum \frac{z^n}{n}$.

Remarque 1.0.13.

Lorsque les coefficients de la série entière sont construits de manière multiplicative, on pourra utiliser la règle de d'Alembert à $r > 0$ fixé pour étudier la convergence de la série numérique $\sum a_n r^n$.

Exemple 1.0.14.

Étudions le rayon de convergence de la série

$$\sum \frac{n}{2^n} z^n.$$

Soit $r > 0$, posons $a_n = \left| \frac{n}{2^n} r^n \right|$, et calculons pour tout $n > 0$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} \times \frac{r}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{r}{2}.$$

Ainsi, par la règle de d'Alembert, si $r > 2$, la série $\sum \frac{n}{2^n} R^n$ diverge, et si $r < 2$, la série $\sum \frac{n}{2^n} r^n$ converge (absolument).

Ainsi, le rayon de convergence de cette série est 2.

Exercice 1.0.15.

En appliquant la règle de d'Alembert, étudier les rayons de convergence des séries suivantes.

1. $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$
2. $\sum \ln(n) z^n$
3. $\sum \frac{n!}{(2n)!} z^n$
4. $\sum \frac{n!}{n^n} z^n$

Remarque 1.0.16.

Certaines séries entières sont écrites comme des sommes ne portant pas sur tous les entiers : on parle alors de série *lacunaires*.

Exercice 1.0.17.

Déterminer le rayon de convergence et les coefficients de la série $\sum n 2^n x^{2n}$.

Théorème 1.0.18 (Théorème de comparaison des séries entières, version $\sim$).

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières.

Si $|a_n| \sim |b_n|$, alors $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

Démonstration.

Notons R_a et R_b les rayons de convergence des deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$, respectivement.

Soit $0 < r < R_b$, alors la série $\sum b_n r^n$ converge absolument, et comme $|a_n r^n| \sim |b_n r^n|$, alors, par comparaison de séries à termes positifs, les séries $\sum a_n r^n$ ont même nature. Ainsi, $R_b = R_a$. $\square$

Théorème 1.0.19 (Théorème de comparaison des séries entières, version $\leq$).

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières.

Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq |b_n|$, alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est supérieur ou égal à celui de $\sum b_n z^n$.

Démonstration.

Notons R_a et R_b les rayons de convergence des deux séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$, respectivement.

Soit $0 < r < R_b$, alors la série $\sum b_n r^n$ converge absolument, et comme pour tout $n \geq 0$, $|a_n r^n| \leq |b_n r^n|$, alors, par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum a_n r^n$ converge aussi absolument. Ainsi, $R_b \leq R_a$. $\square$

Exercice 1.0.20.

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes.

1. $\sum \ln(n) z^n$
2. $\sum \frac{z^n}{1 + n \sin^2 n}$

Proposition 1.0.21.

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe. Alors les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

Démonstration.

Admis

□

Corollaire 1.0.22.

Avec les mêmes notations, les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum \frac{a_n}{n} z^n$ ont le même rayon de convergence.

Exercice 1.0.23.

Déterminer le rayon de convergence de $\sum \frac{z^n}{1+n^2}$.

Exercice 1.0.24.

Comparer les rayons de convergence des séries $\sum z^n$, $\sum \frac{z^n}{n}$, $\sum \frac{z^n}{n^2}$. Comparer leurs comportements sur le cercle $|z| = R$.

2 Somme d'une série entière

Dans toute cette partie, on se restreint au cas d'une variable x réelle.

Définition 2.0.1.

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

On appelle *fonction somme* de la série entière la fonction

$$S: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

définie au moins sur l'intervalle $] -R, R[$.

Lemme 2.0.2.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors, la série $\sum n a_n z^{n-1}$ a aussi pour rayon de convergence R , et pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < R$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} z^n.$$

Démonstration.

Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence. Pour $z \neq 0$, par l'argument de linéarité, les séries numériques $\sum n a_n z^n$ et $\sum n a_n z^{n-1}$ ont le même rayon de convergence.

C'est un simple décalage d'indice pour la relation. □

Théorème 2.0.3 (Dérivation terme à terme).

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et de somme

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

pour tout $x \in] -R, R[$.

Alors, S est dérivable sur $] -R, R[$, et, pour tout $x \in] -R, R[$,

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1},$$

c'est-à-dire que, pour tout $x \in] -R, R[$,

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{dx} (a_n x^n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Démonstration.

Admis

□

Corollaire 2.0.4 (régularité d'une somme de série entière).

Si $\sum a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$, alors sa fonction somme est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R, R[$.

Démonstration.

On définit sur $] -R, R[$ la fonction $S: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

On montre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, S est n fois dérivable. □

Exercice 2.0.5.

Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^{n-1}}$.

Exercice 2.0.6.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Calculer y' et $y(0)$. En déduire une expression de $y(x)$ pour tout x .

Corollaire 2.0.7.

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, de somme

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

pour tout $x \in] -R, R[$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}.$$

Démonstration.

On montre par récurrence que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in]-R, R[$,

$$S^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1) \cdots (n-p+1) a_n x^{n-p}.$$

Il suffit ensuite d'évaluer ceci en $x = 0$. $\square$

Corollaire 2.0.8 (Intégration/primitivation terme à terme).

Si $\sum a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$, alors $\sum a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ est également une série entière de rayon de convergence R , et sa somme est une primitive de la somme de $\sum a_n x^n$.

Plus précisément, pour tout $x \in]-R, R[$,

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x (a_n t^n) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Démonstration.

Il suffit d'observer que, par les règles précédentes, la série $\sum a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ a le même rayon de convergence que la série $\sum a_n x^n$, et qu'en dérivant terme à terme on obtient, pour tout $x \in]-R, R[$,

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{dx} \left(a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

En $x = 0$, on obtient $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = 0$, ce qui justifie bien que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \right) dt.$$

$\square$

Exercice 2.0.9.

Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme des séries entières suivantes.

$$1. \sum \frac{x^n}{n} \qquad 2. \sum n x^n$$

Remarque 2.0.10.

Avec les notations précédentes, pour $a, b \in]-R, R[$, on a donc

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b a_n t^n dt.$$

Cette relation n'est plus toujours vraie lorsque a ou b valent R ou $-R$!

Exercice 2.0.11.

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$.

Exercice 2.0.12.

Pour $x \in]-1, 1[$, écrire $\text{Arctan}(x)$ comme somme d'une série entière.

3 Fonctions développables en séries entières

Définition 3.0.1.

Soit f une fonction réelle définie au moins sur un intervalle de la forme $] -\varepsilon, \varepsilon[$, où $\varepsilon > 0$.

On dit que f est *développable en série entière* au voisinage de 0 s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et un réel r vérifiant $0 < r \leq \min(R, \varepsilon)$ tels que, pour tout $x \in]-r, r[$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Dans ce cas, la série entière $\sum a_n x^n$ est appelée un *développement en série entière* de f au voisinage de 0.

Proposition 3.0.2.

Si une fonction f est développable en série entière au voisinage de 0, alors elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le n^{e} coefficient du développement est donné par

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Démonstration.

Cela découle immédiatement du corollaire 2.0.7. $\square$

Remarque 3.0.3.

Autrement dit, si f est développable en série entière, on peut écrire, au voisinage de 0 :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!}.$$

On reconnaît les termes de la formule de Taylor (on parle de *série de Taylor*).

Corollaire 3.0.4 (Unicité d'un DSE).

Il y a unicité d'un développement en série entière dès lors que ce dernier admet un rayon de convergence non nul.

Plus précisément, si deux suites $(a_n), (b_n)$ et un réel $R > 0$ vérifient

$$\forall x \in]-R, R[, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n,$$

alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = b_n.$$



Toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ ne sont pas forcément développables en série entière !

Exemple 3.0.5.

On considère la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f: x \mapsto e^{-1/x^2},$$

prolongée par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

Par récurrence, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

▷ f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$;

▷ il existe un polynôme P_n tel que pour tout $x \neq 0$,

$$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2};$$

▷ $f^{(n)}(0) = 0$.

Ainsi, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$. Si f était développable en série entière au voisinage de 0, il existerait $R > 0$ tel que pour tout $x \in]-R, R[$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0.$$

Comme l'exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, c'est impossible, et donc absurde.

Les développements suivants sont à connaître par cœur, domaine de validité et rayon de convergence compris.

Théorème 3.0.6 (formulaire de DSE).

Les fonctions suivantes sont développables en série entière en 0.

▷ Pour tout $x \in]-1, 1[$ (rayon de CV : 1),

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

▷ Pour tout $x \in]-1, 1[$ (rayon de CV : 1),

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.$$

▷ Pour tout $x \in \mathbb{R}$ (rayon de CV : $+\infty$),

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

▷ Pour tout $x \in \mathbb{R}$ (rayon de CV : $+\infty$),

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

▷ Pour tout $x \in \mathbb{R}$ (rayon de CV : $+\infty$),

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

▷ Si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, pour tout $x \in]-1, 1[$ (rayon de CV : $+\infty$),

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n,$$

où l'on note :

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Démonstration.

Pour l'exponentielle, le sinus et le cosinus : utiliser la formule de Taylor avec reste intégral, et majorer le reste.

Pour $\frac{1}{1-x}$ c'est la formule de sommation géométrique. Primitiver terme à terme pour obtenir celle sur $\ln(1+x)$. □

Remarque 3.0.7 (hors-programme).

La relation $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ est valide pour $x = 1$.

Remarque 3.0.8 (formule du binôme).

Si $\alpha \in \mathbb{N}$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n,$$

car cette somme est nulle à partir du rang $\alpha + 1$: c'est un polynôme en x ! Le rayon de convergence de ce développement en série entière est alors $+\infty$.

Exercice 3.0.9.

À partir du développement en série entière (DSE) de $\ln(1-x)$, former les DSE de $\ln(1-x^3)$ et de

$\ln(1+x+x^2)$. Préciser les rayons de convergence de ces développements.

Théorème 3.0.10.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Démonstration.

Admis. □

Remarque 3.0.11.

Lorsque l'on essaie de déterminer une solution particulière d'une équation différentielle, on la cherche souvent sous la forme d'une fonction développable en série entière.

Exemple 3.0.12.

Cherchons une solution y de l'équation différentielle

$$y' - 2xy = 0, \quad (\mathcal{E})$$

avec la condition que y soit développable en série entière sur un intervalle de la forme $] - R, R[$.

On raisonne par analyse-synthèse.

Soit y une telle solution. Supposons qu'il existe donc un $R > 0$ et une suite de réels (a_n) tels que pour tout $x \in] - R, R[$:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

On sait donc que y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] - R, R[$, et que, pour tout $x \in] - R, R[$:

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n.$$

On a alors

$$2xy(x) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n,$$

donc

$$y'(x) - 2xy(x) = a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+1)a_{n+1} - 2a_{n-1})x^n.$$

Par unicité du développement en série entière d'une fonction, on a donc $a_1 = 0$ et, pour tout $n \geq 1$, $(n+1)a_{n+1} - 2a_{n-1} = 0$, ce qui permet d'obtenir

$$a_{n+1} = \frac{2}{n+1} a_{n-1}.$$

On voit donc que l'on peut obtenir d'un côté les valeurs de $a_0, a_2, a_4, \dots$, et de l'autre $0 = a_1 = a_3 = a_5 = \dots$, ce qui mène à discuter selon la parité de n .

On montre alors par récurrence simple que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{2n} = \frac{a_0}{n!} \text{ et } a_{2n+1} = 0.$$

On a alors

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n} = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!}.$$

On reconnaît :

$$y(x) = a_0 \exp(x^2).$$

Réciproquement, la fonction $y : x \mapsto \exp(-x^2)$ est développable en série-entière sur $\mathbb{R}$ tout entier, et l'on voit aisément (en dérivant) que y est solution de $(\mathcal{E})$.

Exercice 3.0.13.

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, soit y développable en série entière sur $] - 1, 1[$ et vérifiant $y(0) = 1$ ainsi que, pour tout $x \in] - 1, 1[$, $(1+x)y'(x) - \alpha y(x) = 0$.

Donner une relation de récurrence vérifiée par les coefficients du développement de y , et résoudre cette relation.

Exercice 3.0.14.

Démontrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$(t+1)e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!} t^n.$$

Trouver une solution développable en série entière au voisinage de 0 de l'équation différentielle

$$ty'(t) + y(t) = (t+1)e^t.$$

Exercice 3.0.15 (plus difficile, suite de l'exemple 3.0.12).

On considère une fonction y développable en série entière sur un intervalle $] - R, R[$, solution du problème de Cauchy

$$y' - 2xy = 2xe^{x^2} \text{ et } y(0) = 0.$$

On écrit $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Déterminer a_0 , et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n+1} = 0$ et

$$(n+1)!a_{2(n+1)} - n!a_{2n} = 1.$$

En déduire une expression de a_{2n} pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis de $y(x)$.

Vérifier que la fonction trouvée est bien solution de ce problème.