

# IX Diagonalisation et trigonalisation

Dans tout ce chapitre, on considérera que  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou que  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , et l'on identifiera les vecteurs colonnes (éléments de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ ) aux vecteurs de  $\mathbb{K}^n$ , ce qui revient à noter verticalement les  $n$ -uplets.

On rappelle que l'on note  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices carrées de taille  $n \times n$ , et  $\text{GL}_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices carrées de taille  $n \times n$  qui sont inversibles.

On notera  $I_n$  la matrice identité de dimension  $n$ , et  $\text{Id}_E$  l'endomorphisme « identité » sur  $E$  (c'est la fonction  $x \mapsto x$ ).

## 1 Diagonalisation

### 1.1 Matrices diagonalisables

#### Définition 1.1.1.

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On dit que  $A$  est *diagonalisable* s'il existe  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  et  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  diagonale telle que  $A = PDP^{-1}$ .

*Diagonaliser* une matrice, c'est donner (le cas échéant) un exemple de telles matrices  $P$  et  $D$ .

#### Remarque 1.1.2.

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On suppose  $A$  diagonalisable. Alors les colonnes de  $P$  sont des vecteurs propres de  $A$ , et les coefficients diagonaux de la matrice  $D$  les valeurs propres correspondantes. En effet, si  $e_i$  désigne le  $i$ -ème vecteur de la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ , alors  $Pe_i$  est la  $i$ -ème colonne de  $P$ .

#### Théorème 1.1.3.

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors  $A$  est diagonalisable si et seulement s'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{K}^n$  constituée de vecteurs propres de  $A$ .

Dans ce cas, on peut écrire  $A = PDP^{-1}$ , où les colonnes de  $P$  sont les vecteurs de la base  $\mathcal{B}$ , et  $D$  est la matrice diagonale dont les coefficients sont les valeurs propres correspondantes.

#### Démonstration.

Cela revient à observer la formule de changement de base dans la formule  $A = PDP^{-1}$ .  $\square$

#### Exercice 1.1.4.

Dire si les matrices suivantes sont diagonalisables, et les diagonaliser le cas échéant.

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2. B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3. C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

#### Proposition 1.1.5.

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $E_1, \dots, E_p$  ses sous-espaces propres. Alors  $A$  est diagonalisable si et seulement si  $E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_p = \mathbb{K}^n$ .

#### Démonstration.

Si  $A$  est diagonalisable, alors il existe une base de  $\mathbb{K}^n$  constituée de vecteurs propres de  $A$ . On regroupe ces vecteurs propres selon leurs valeurs propres. Soit  $1 \leq i \leq p$ , notons  $\mathcal{B}_i$  la famille obtenue en ne conservant que les vecteurs de  $\mathcal{B}$  qui sont des vecteurs propres pour la valeur propre associée à  $E_i$ , et notons  $F_i = \text{Vect}(\mathcal{B}_i)$ . Alors,  $\mathcal{B}_i$  est libre, donc est une base de  $F_i$ , et par concaténation de bases, on a  $\mathbb{K}^n = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$ .

Or, si  $1 \leq i \leq p$ , on a  $F_i \subset E_i$ , donc  $\mathbb{K}^n \subset E_1 + \dots + E_p$ , donc  $\mathbb{K}^n = E_1 + \dots + E_p$ . On sait déjà que cette somme est directe, donc  $\mathbb{K}^n = E_1 \oplus \dots \oplus E_p$ .

Réciproquement, si  $\mathbb{K}^n = E_1 \oplus \dots \oplus E_p$ , il suffit de considérer des bases  $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$  de  $E_1, \dots, E_p$ , et de noter  $\mathcal{B}$  leur concaténée. Alors par concaténation de bases,  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{K}^n$ , constituée de vecteurs propres de  $A$ , donc  $A$  est diagonalisable.  $\square$

#### Remarque 1.1.6 (HP, mais peut être utile).

On sait que  $E_1, \dots, E_p$  sont en somme directe. D'après la formule de Grassmann,  $A$  est donc diagonalisable si et seulement si  $\dim E_1 + \dots + \dim E_p = n$ .

#### Théorème 1.1.7.

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Pour  $\lambda \in \mathbb{K}$ , notons  $m_\lambda$  la multiplicité de  $\lambda$  en tant que valeur propre de  $A$ , et  $E_\lambda$  le sous-espace propre associé.

Alors  $A$  est diagonalisable si et seulement si  $\chi_A$  est scindé et si, pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(A)$ ,

$$\dim(E_\lambda) = m_\lambda.$$

#### Démonstration.

Si  $A$  est diagonalisable, en écrivant  $A = PDP^{-1}$ , où  $D$  est diagonale, on a

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= \det(xI_n - PDP^{-1}) \\ &= \det(P(xI_n - D)P^{-1}) \\ &= \det(xI_n - D) \\ &= \chi_D(x). \end{aligned}$$

Avec  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , on a

$$\chi_A(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n),$$

qui est bien scindé. En regroupant ces termes valeur propre par valeur propre, on obtient que si  $\lambda \in \text{Sp}(A)$ , alors le terme  $(x - \lambda)$  apparaît autant de fois dans  $\chi_A(x)$  que  $\lambda$  apparaît sur la diagonale de  $D$ , donc qu'il y a de vecteurs propres associés à  $\lambda$  dans les colonnes de  $P$ . On obtient donc bien  $\dim(E_\lambda) = m_\lambda$ .

Réciproquement, supposons que  $\chi_A$  est scindé et que pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(A)$ , on a  $\dim(E_\lambda) = m_\lambda$ . Alors,

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim(E_\lambda) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} m_\lambda = \deg(\chi_A) = n,$$

donc  $A$  est diagonalisable.  $\square$

### Rappel 1.1.8.

Un polynôme est scindé s'il peut s'écrire comme produit de polynômes de degré 1.

### Exercice 1.1.9.

Diagonaliser  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

### Exercice 1.1.10.

Montrer que la matrice  $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ , mais pas dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . La diagonaliser dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ .

### Corollaire 1.1.11.

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Si  $\chi_A$  est scindé à racines simples, i.e. si  $A$  admet  $n$  valeurs propres distinctes, alors  $A$  est diagonalisable.

### Démonstration.

Si  $\lambda \in \text{Sp}(A)$ , on a

$$1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m_\lambda = 1,$$

donc  $\dim(E_\lambda) = m_\lambda$ , donc, comme  $\chi_A$  est scindé,  $A$  est diagonalisable.  $\square$

### Exercice 1.1.12.

Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ? Si c'est le cas, la diagonaliser.

## 1.2 Endomorphismes diagonalisables

Les résultats de la partie précédente s'adaptent immédiatement aux endomorphismes d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie.

On note ici  $n = \dim(E)$ .

### Définition 1.2.1.

Un endomorphisme  $f \in \mathcal{L}(E)$  est diagonalisable s'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  dans laquelle  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  est diagonale.

### Théorème 1.2.2 (caractérisation matricielle).

Un endomorphisme  $f \in \mathcal{L}(E)$  est diagonalisable si et seulement s'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  dans laquelle  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  est diagonalisable.

Le cas échéant, pour toute base  $\mathcal{C}$  de  $E$ ,  $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$  est diagonalisable.

### Démonstration.

C'est juste la traduction de la définition.  $\square$

On a toutefois les caractérisations suivantes, qui s'obtiennent immédiatement par la caractérisation matricielle et les résultats de la partie précédente.

### Proposition 1.2.3.

Un endomorphisme  $f \in \mathcal{L}(E)$  est diagonalisable si et seulement s'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  constituée de vecteurs propres de  $f$ .

### Définition 1.2.4.

Diagonaliser un endomorphisme  $f \in \mathcal{L}(E)$ , c'est donner une base de  $E$  constituée de vecteurs propres de  $f$ .

### Proposition 1.2.5.

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $E_1, \dots, E_p$  ses sous-espaces propres. Alors  $f$  est diagonalisable si et seulement si  $E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_p = E$ .

### Exemple 1.2.6.

Tout projecteur et toute symétrie de  $E$  est diagonalisable.

### Remarque 1.2.7 (HP, mais peut être utile).

On sait que  $E_1, \dots, E_p$  sont en somme directe. D'après la formule de Grassmann,  $f$  est donc diagonalisable si et seulement si  $\dim E_1 + \dots + \dim E_p = n$ .

### Théorème 1.2.8.

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Pour  $\lambda \in \mathbb{K}$ , notons  $m_\lambda$  la multiplicité de  $\lambda$  en tant que valeur propre de  $f$ , et  $E_\lambda$  le sous-espace propre associé.

Alors  $f$  est diagonalisable si et seulement si  $\chi_f$  est scindé et si, pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(f)$ ,

$$\dim(E_\lambda) = m_\lambda.$$

On retiendra principalement le résultat suivant.

**Corollaire 1.2.9.**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Si  $\chi_f$  est scindé à racines simples, *i.e.* si  $f$  admet  $n$  valeurs propres distinctes, alors  $f$  est diagonalisable.

**Exercice 1.2.10.**

Dans  $E = \mathbb{R}_2[X]$ , on considère

$$\varphi : P \mapsto P - (X + 1)P'.$$

Justifier que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $E$ , et déterminer s'il est diagonalisable.

Reprendre l'exercice avec  $E = \mathbb{R}_n[X]$ .

## 2 Trigonalisation

### 2.1 Matrices trigonalisables

**Définition 2.1.1.**

Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est dite *trigonalisable* s'il existe une matrice  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  et une matrice  $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  triangulaire supérieure telles que  $A = PTP^{-1}$ .

*Trigonaliser*  $A$ , c'est donner un exemple de telles matrices  $P$  et  $T$ .

**Remarque 2.1.2.**

Une matrice diagonale étant un cas particulier de matrice triangulaire, toute matrice diagonalisable est trigonalisable.

**Théorème 2.1.3.**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors  $A$  est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique  $\chi_A$  est scindé. Dans ce cas, les coefficients diagonaux de la matrice  $T$  sont les valeurs propres de  $A$ , comptées avec multiplicité.

**Démonstration.**

Admis □

**Exercice 2.1.4.**

Trigonaliser la matrice  $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ .

**Corollaire 2.1.5.**

Toute matrice à coefficients complexes est trigonalisable (sur  $\mathbb{C}$ ).

**Démonstration.**

Comme tout polynôme, le polynôme caractéristique est scindé sur  $\mathbb{C}$ . □

**Remarque 2.1.6.**

Toute matrice à coefficients réels est trigonalisable sur  $\mathbb{C}$ , *i.e.* en autorisant les valeurs propres complexes et avec une matrice  $P$  à coefficients complexes.

**Exercice 2.1.7.**

Montrer que la matrice suivante est trigonalisable sur  $\mathbb{C}$  mais pas sur  $\mathbb{R}$  :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Proposition 2.1.8.**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Soit  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres (comptées avec multiplicité) de  $A$ . Alors

$$\begin{aligned} \text{Tr}(A) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i ; \\ \det(A) &= \prod_{i=1}^n \lambda_i. \end{aligned}$$

**Démonstration.**

On écrit  $A = PTP^{-1}$ , et l'on sait que les éléments diagonaux de  $T$  sont  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Alors,  $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(T)$  et  $\det(A) = \det(T)$ , ce qui permet de conclure. □

**Exercice 2.1.9.**

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sans calculs, démontrer que  $A$  est diagonalisable.

**Exercice 2.1.10.**

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sans calculs, démontrer que  $A$  est diagonalisable.

### 2.2 Endomorphismes trigonalisables

Les résultats de la partie précédente s'adaptent immédiatement aux endomorphismes d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie.

On note ici  $n = \dim(E)$ .

**Définition 2.2.1.**

Un endomorphisme  $f \in \mathcal{L}(E)$  est trigonalisable s'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  dans laquelle  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  est triangulaire supérieure.

On retiendra principalement le résultat suivant.

**Théorème 2.2.2** (caractérisation matricielle).

Un endomorphisme  $f \in \mathcal{L}(E)$  est trigonalisable si et seulement s'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  dans laquelle  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  est trigonalisable.

Le cas échéant, pour toute base  $\mathcal{C}$  de  $E$ ,  $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$  est trigonalisable.

**Démonstration.**

C'est juste la traduction de la définition.  $\square$

**Théorème 2.2.3.**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Alors  $f$  est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique  $\chi_f$  est scindé. Dans ce cas, les coefficients diagonaux de la matrice  $T$  sont les valeurs propres de  $f$ , comptées avec multiplicité.

**Remarque 2.2.4.**

Tout endomorphisme diagonalisable est trigonalisable.

**Corollaire 2.2.5.**

Tout endomorphisme d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel est trigonalisable.

**Proposition 2.2.6.**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Soit  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres complexes (comptées avec multiplicité) de  $f$ . Alors

$$\begin{aligned} \text{Tr}(f) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i ; \\ \det(f) &= \prod_{i=1}^n \lambda_i. \end{aligned}$$

### 3 Réflexes et méthodes

Rien dans cette partie n'est officiellement au programme. Ces quelques petites astuces seront toutefois utiles pour réduire aisément des matrices de petite dimension ! Si vous les utilisez, vous devrez toutefois les justifier.

On considère  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

**Remarque 3.0.1.**

Si la somme des coefficients de chaque ligne de  $A$  est constante et vaut  $s$ , alors  $s$  est valeur propre de

$A$  et  $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$  est un vecteur propre associé. C'est équivalent au fait que la somme des colonnes de  $A$

vaut  $\begin{pmatrix} s \\ \vdots \\ s \end{pmatrix}$ .

Pour le justifier, il suffit d'effectuer le calcul

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Remarque 3.0.2.**

La matrice  $A$  est non inversible si et seulement si 0 est valeur propre de  $A$ , et si et seulement s'il existe une combinaison linéaire non triviale des colonnes de  $A$  valant la colonne nulle.

$$\text{Si } x_1 C_1 + \dots + x_n C_n = 0, \text{ alors la colonne } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

appartient au noyau de  $A$ .

**Remarque 3.0.3.**

Si  $\lambda \in \mathbb{K}$ , il n'y a qu'une seule matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  diagonalisable qui n'a que  $\lambda$  comme valeur propre : c'est  $\lambda I_n$  !

En effet, si  $A$  est une telle matrice, il existe une matrice  $P$  inversible telle que

$$A = P(\lambda I_n)P^{-1} = \lambda P P^{-1} = \lambda I_n.$$

**Remarque 3.0.4.**

Si  $A$  est une matrice à coefficients réels et si  $\lambda$  est une valeur propre complexe de  $A$ , alors  $\bar{\lambda}$  est aussi une valeur propre de  $A$ .

En effet,  $\chi_A$  est à coefficients réels et a pour racine  $\lambda$ , donc aussi  $\bar{\lambda}$ .

**Exercice 3.0.5.**

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sans calculer  $\chi_A$ , est-ce que  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$  ? Sur  $\mathbb{R}$  ?

## 4 Applications

### 4.1 Calcul des puissances d'une matrice

**Proposition 4.1.1.**

Soit  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , soit  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  telles que  $A = P B P^{-1}$ .

Alors, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $A^p = P B^p P^{-1}$ .

**Démonstration.**

On le démontre par récurrence simple sur  $p$ .

Pour  $p = 0$ , on a  $A^0 = I_n = P I_n P^{-1} = P B^0 P^{-1}$ .

Soit  $p \in \mathbb{N}$ , supposons que  $A^p = P B^p P^{-1}$ . Alors,

$$A^{p+1} = A^p \times A = P B^p P^{-1} P B P^{-1} = P B^{p+1} P^{-1}.$$

On a bien obtenu le résultat au rang  $p + 1$ .

Ainsi, par récurrence, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $A^p = P B^p P^{-1}$ .  $\square$

**Remarque 4.1.2.**

Cela signifie que si  $A$  est semblable à  $B$ , alors pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $A^p$  est semblable à  $B^p$ .

Ceci résultat est particulièrement utile pour les matrices diagonalisables, car le calcul d'une puissance de matrice diagonale est particulièrement simple.

**Proposition 4.1.3.**

Soit  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ . Alors, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^p \end{pmatrix}$$

**Exercice 4.1.4.**

Soit  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  et  $N = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ .

Calculer  $N^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Proposition 4.1.5.**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , et une suite  $(X_p)_{p \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  vérifiant pour tout  $p \in \mathbb{N}$  :

$$X_{p+1} = A X_p.$$

Alors, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,

$$X_p = A^p X_0.$$

**Démonstration.**

Par récurrence.  $\square$

**Exemple 4.1.6.**

Considérons deux suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $a, b, c, d \in \mathbb{K}$  tels que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{cases} u_{n+1} = a u_n + b v_n \\ v_{n+1} = c u_n + d v_n \end{cases}$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on peut poser

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix},$$

ainsi que

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

On a alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$X_{n+1} = A X_n,$$

ce qui donne immédiatement

$$X_n = A^n X_0.$$

Si la matrice  $A$  est diagonalisable, on peut facilement calculer la matrice  $A^n$  et en déduire l'expression des termes généraux de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Exercice 4.1.7.**

Déterminer le terme général de chacune des suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant  $u_0 = 1$ ,  $v_0 = 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2v_n, \\ v_{n+1} = 2u_n + v_n. \end{cases}$$

**Exercice 4.1.8.**

Déterminer le terme général de chacune des suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant  $u_0 = 0$ ,  $v_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - v_n, \\ v_{n+1} = u_n + v_n. \end{cases}$$

## 4.2 Suites vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre deux à coefficients constants

Soit  $a, b \in \mathbb{C}$  non tous nuls. On s'intéresse à l'ensemble  $E$  des suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à termes dans  $\mathbb{K}$  vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n. \quad (R)$$

Posons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ , ainsi que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_{n+1} = A X_n$ , donc  $X_n = A^n X_0$ .

On peut alors calculer  $X_n$ , et donc  $u_n$ , si l'on sait calculer  $A^n$ .

On peut déjà commencer par donner un premier résultat sur  $E$ .

**Proposition 4.2.1.**

L'ensemble  $E$  est un espace vectoriel de dimension 2 sur  $\mathbb{K}$ .

**Démonstration.**

On peut le voir de manière élémentaire.  $E$  est inclus dans l'ensemble des suites numériques, qui est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Il suffit donc de montrer que  $E$  en est un sous-espace vectoriel.

- ▷ La suite nulle vérifie la relation  $(R)$ .
- ▷ On vérifie facilement par le calcul que la combinaison linéaire de deux suites vérifiant la relation  $(R)$  vérifie également la relation  $(R)$ .

L'ensemble  $E$  est donc bien un espace vectoriel. On considère ensuite les deux suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , définies par  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 0$ ,  $b_0 = 0$ ,  $b_1 = 1$  et vérifiant la relation de récurrence  $(R)$ . On montre sans difficulté que  $((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}})$  est une famille libre et génératrice de  $E$ . C'est donc une base, et  $E$  est donc de dimension deux.

On pourrait aussi en donner une démonstration plus abstraite. Bornons nous juste à remarquer que l'ensemble des suites  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant pour tout  $n \in \mathbb{N}$  la relation  $X_{n+1} = AX_n$  est un sev de  $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K})$  de dimension 2 : c'est en effet

$$\left\{ \left( A^n \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right)_{n \in \mathbb{N}} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{K} \right\}.$$

□

Considérons maintenant, pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - a\lambda - b$$

La question de la diagonalisabilité de  $A$  se ramène ainsi à l'étude des solutions de l'équation  $\lambda^2 = a\lambda + b$ .

**Définition 4.2.2.**

L'équation caractéristique de la relation  $(R)$  est l'équation

$$\lambda^2 = a\lambda + b. \quad (\text{EC})$$

**Remarque 4.2.3.**

La suite  $(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est solution de  $(R)$  si et seulement si  $\lambda$  est solution de l'équation caractéristique  $\lambda^2 = a\lambda + b$ , si et seulement si  $\lambda$  est valeur propre de  $A$  et si et seulement si  $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$  est vecteur propre de  $A$ .

**Exercice 4.2.4.**

Donner les équations caractéristiques des relations de récurrence suivantes.

1.  $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$
2.  $u_{n+2} = -3u_n$
3.  $u_{n+1} = -2u_n + u_{n-1}$
4.  $u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2}$
5.  $u_n + u_{n+1} + u_{n+2} = 0$

**Lemme 4.2.5.**

Si l'équation caractéristique (EC) a deux solutions complexes  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , alors  $A$  est semblable à

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

**Démonstration.**

$A$  a alors deux valeurs propres distinctes et est de taille  $2 \times 2$ , donc est diagonalisable. □

**Théorème 4.2.6.**

Si l'équation caractéristique  $\lambda^2 = a\lambda + b$  admet deux solutions  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  distinctes dans  $\mathbb{K}$ , alors les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  solutions de  $(R)$  sont les suites de terme général

$$u_n = \alpha \lambda_1^n + \beta \lambda_2^n,$$

où  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ .

Ainsi,  $((\lambda_1^n)_{n \in \mathbb{N}}, (\lambda_2^n)_{n \in \mathbb{N}})$  est une base de  $E$ .

**Démonstration.**

Il suffit de voir qu'il existe une matrice inversible  $P$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$A^n = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} P^{-1},$$

donc qu'avec  $P^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha' \lambda_1^n \\ \beta' \lambda_2^n \end{pmatrix},$$

et il suffit de terminer le calcul en exprimant les coefficients de  $P$ . □

**Exercice 4.2.7.**

Déterminer la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant  $u_0 = 2$ ,  $u_1 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

**Lemme 4.2.8.**

Si l'équation caractéristique EC a une solution double  $\lambda \in \mathbb{K}$ , alors  $A$  est semblable à

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

**Démonstration.**

Admis (même si vous devez vous douter que cela tourne autour du caractère trigonalisable de  $A$ ). □

**Théorème 4.2.9.**

Si l'équation caractéristique  $\lambda^2 = a\lambda + b$  admet une solution double  $\lambda \in \mathbb{K}$ , alors les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  solutions de  $(R)$  sont les suites de terme général

$$u_n = \alpha \lambda^n + \beta n \lambda^n,$$

où  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ .

Ainsi,  $((\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}, (n\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}})$  est une base de  $E$ .

**Démonstration.**

On montre que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$B^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

Il suffit de voir qu'il existe une matrice inversible  $P$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$A^n = P \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} P^{-1},$$

donc qu'avec  $P^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} &= P \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} \\ &= P \begin{pmatrix} \alpha'\lambda^n + \beta'n\lambda^{n-1} \\ \beta'\lambda^n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et il suffit de terminer le calcul en exprimant les coefficients de  $P$ .  $\square$

**Exercice 4.2.10.**

Déterminer la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant  $u_0 = 1$ ,  $u_1 = 3$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n.$$

**Théorème 4.2.11** (Cas réel).

On suppose ici que  $a, b \in \mathbb{R}$ , et que  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

Si l'équation caractéristique  $\lambda^2 = a\lambda + b$  admet deux solutions  $\rho \exp(\pm i\theta)$  complexes non réelles, où  $\rho \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\theta \in ]0, \pi[$ , conjuguées deux à deux, alors les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  solutions de  $(R)$  sont les suites de terme général

$$u_n = \alpha \rho^n \cos(n\theta) + \beta \rho^n \sin(n\theta),$$

où  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Ainsi,  $((\rho^n \cos(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}, (\rho^n \sin(n\theta))_{n \in \mathbb{N}})$  est une base de  $E$ .

**Remarque 4.2.12.**

Les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  se déterminent à l'aide des conditions initiales, c'est-à-dire (en général) des valeurs de  $u_0$  et  $u_1$ .

**Exercice 4.2.13.**

Déterminer la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant  $u_0 = u_1 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0.$$

**Exercice 4.2.14** (suite de Fibonacci).

Déterminer la suite  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

**5 Résolution numérique**

Cette partie sera utile dans l'optique de l'oral « Mathématiques-Informatique » du concours Centrale-Supélec, ainsi qu'à l'oral de Mathématiques du concours CCINP. À vous de faire tourner ces exemples sur votre machine.

Reprenons l'exemple vu dans le premier chapitre de réduction.

```
1 import numpy as np
2 import numpy.linalg as la
3
4 A = np.array([[1., 2.],
5               [2., 1.]])
6 v, P = la.eig(A)
```

Ici, la matrice  $A$  est diagonalisable,  $v$  est le vecteur de ses valeurs propres, et  $P$  est une matrice de passage associée. On peut alors calculer la matrice diagonale  $D$  avec la fonction `diag` de `numpy`, et inverser  $P$  avec la fonction `inv` de `numpy.linalg`. Il suffit alors de multiplier les matrices avec la méthode `dot`.

```
7 D = np.diag(v)
8 Pinv = la.inv(P)
9 B = P.dot(D).dot(Pinv)
```

Remarquons que la matrice  $B$  n'est pas exactement égale à  $A$  ici, vu que le calcul est approché. On peut s'en rendre compte par la commande suivante.

```
10 A==B
```

Rappelons enfin qu'une telle écriture donne une matrice booléenne. Afin de tester l'égalité « mathématique » entre  $A$  et  $B$ , on devra utiliser l'écriture suivante.

```
11 (A==B).all()
```