

IV Déterminants

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et n est un entier naturel non nul. On notera I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1 Déterminant d'une matrice carrée

En dimension 2 et 3, on dispose d'outils géométriques pratiques pour déterminer si une famille de vecteurs est libre : le déterminant en dimension 2, le produit mixte en dimension 3. L'objectif de cette partie est de généraliser cet outil à toute dimension.

Définition 1.0.1.

Il existe une unique application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$, appelée *déterminant* et notée $\det$, qui vérifie les trois propriétés suivantes :

- ▷ cette application est linéaire par rapport à chacune des colonnes ;
- ▷ si M' est obtenue à partir de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en échangeant deux colonnes, alors $\det(M') = -\det(M)$;
- ▷ $\det(I_n) = 1$.

Si $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$, alors on note

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Démonstration.

Admis

□

Proposition 1.0.2.

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(A^\top) = \det(A)$.

Démonstration.

Admis

□

Remarque 1.0.3.

Les propriétés du déterminant vraies sur les colonnes le sont aussi sur les lignes.

Notamment, le déterminant est linéaire par rapport à chacune des lignes, et nul si au moins deux lignes sont égales.

Exercice 1.0.4.

En reprenant les règles précédentes, calculer les déterminants

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$



On ne calcule que des déterminant de matrices *carrées*.

Remarque 1.0.5 (interprétation géométrique).

Dans $\mathbb{R}^2$ muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$, alors pour deux vecteurs $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ et $\vec{v} = c\vec{i} + d\vec{j}$, alors on montre que

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant correspond à l'aire orientée du parallélogramme engendré par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Dans $\mathbb{R}^3$ muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, alors pour trois vecteurs $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, $\vec{v} = d\vec{i} + e\vec{j} + f\vec{k}$ et $\vec{w} = g\vec{i} + h\vec{j} + i\vec{k}$, alors on montre que

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}.$$

On retient donc que les calculs menés en première année sont toujours valides.

2 Calcul du déterminant

2.1 Déterminants particuliers

Proposition 2.1.1.

Si une matrice a une ligne ou une colonne nulle, alors son déterminant est nul.

Démonstration.

S'obtient par linéarité par rapport à une ligne ou une colonne.

□

Proposition 2.1.2.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si deux colonnes (ou lignes) de A sont proportionnelles, alors $\det(A) = 0$.

Démonstration.

Il suffit de traiter le cas où les colonnes de A sont égales, par linéarité. Si l'on échange ces deux colonnes dans A , on obtient A , mais alors $\det(A) = -\det(A)$, donc $\det(A) = 0$.

□

Exercice 2.1.3.

Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

Proposition 2.1.4.

Si T est une matrice triangulaire, alors $\det(T)$ est égal au produit des éléments diagonaux de T .

Démonstration.

Admis, découle de la proposition 2.3.1. $\square$

Exercice 2.1.5.

Calculer $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$.

Corollaire 2.1.6.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\det(\lambda I_n) = \lambda^n$.

2.2 Opérations élémentaires.**Exercice 2.2.1.**

Calculer $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

Proposition 2.2.2.

Soit $1 \leq i, j \leq n$, vérifiant $i \neq j$.

Les opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice affectent son déterminant de la façon suivante :

- ▷ $C_i \leftrightarrow C_j$: le déterminant est multiplié par -1 ;
- ▷ $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$: le déterminant est inchangé ;
- ▷ $C_i \leftarrow \lambda C_i$: le déterminant est multiplié par λ .

Démonstration.

Pour la première opération, c'est exactement définition du déterminant. Pour la troisième opération, c'est la propriété de linéarité par rapport à la i -ème colonne.

Pour la deuxième opération, par linéarité par rapport à la i -ème colonne, on obtient le déterminant initial, plus λ fois le déterminant où la i -ème colonne est remplacée par la j -ème colonne, qui est nul puisqu'il admet deux colonnes identiques. $\square$

Exercice 2.2.3.

Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$.

Corollaire 2.2.4.

Soit $1 \leq i, j \leq n$, vérifiant $i \neq j$.

Les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice effectuent son déterminant de la façon suivante :

- ▷ $L_i \leftrightarrow L_j$: le déterminant est multiplié par -1 ;
- ▷ $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$: le déterminant est inchangé ;
- ▷ $L_i \leftarrow \lambda L_i$: le déterminant est multiplié par λ .

Exercice 2.2.5.

Calculer $\begin{vmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

Corollaire 2.2.6.

Une matrice dont la famille des colonnes (ou des lignes) est liée a un déterminant nul.

Démonstration.

On peut alors effectuer une opération sur les colonnes (ou les lignes) pour obtenir un déterminant égal, dont une colonne est nulle. $\square$

Exercice 2.2.7.

Calculer $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Corollaire 2.2.8.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A).$$

Notamment, $\det(\lambda I_n) = \lambda^n$.

Proposition 2.2.9.

Soit $a, b, c, d \in \mathbb{K}$, alors

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Démonstration.

Par linéarité, en développant par rapport à la première colonne puis par rapport à la seconde, on obtient :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} &= ad \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}_{=1} + ab \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}_{=0} + cd \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{=0} + bc \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}_{=-1} \\ &= ad - bc \end{aligned}$$

 $\square$

Exercice 2.2.10 (pour les motivés).

Montrer que pour $a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \mathbb{K}$,

$$\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - ahf - dbi.$$

2.3 Développement d'un déterminant.

Proposition 2.3.1 (Développement par rapport à une colonne/ligne).

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $A_{i,j}$ la matrice de taille $n-1$ obtenue en supprimant la i -ème ligne et la j -ème colonne de A .

1. Développement par rapport à une colonne

Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{i,j}$$

2. Développement par rapport à une ligne

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{i,j}.$$

Démonstration (Admis). □

Ces formules sont compliquées, et ne sont pas à retenir. On utilisera toutefois cette méthode, en utilisant la présentation suivante. Prenons comme exemple le calcul du déterminant

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

On commence d'abord par noter les signes sur ce déterminant (en couleur, ou au crayon), en commençant par le *coin supérieur gauche* avec le signe +, et en alternant le signe à chaque déplacement d'une case.

$$D = \begin{vmatrix} 1^+ & -2^- & 3^+ \\ 1^- & 3^+ & -1^- \\ 3^+ & -1^- & 1^+ \end{vmatrix}.$$

On choisit ensuite une ligne pour une colonne, que l'on surligne (ou que l'on barre). Supposons que l'on développe ici par rapport à la deuxième colonne.

Pour chaque élément de cette ligne, on surligne la ligne correspondante, ce qui crée un déterminant

2×2 avec les cases restantes. Par exemple, on aurait ici en barrant -2 le déterminant suivant

$$A_{1,2} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

par le coefficient ainsi que son signe, ce qui donne le terme

$$-(-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Enfin, on somme le tout. Ici, on obtient

$$\begin{aligned} D &= -(-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2(1 \times 1 - (-1) \times 3) + 3(1 \times 1 - 3 \times 3) \\ &\quad + (1 \times (-1) - 1 \times 3) \\ &= 8 - 24 - 4 \\ &= -20. \end{aligned}$$

2.4 Calcul efficace d'un déterminant.

La technique précédente n'est pas très efficace. On effectuera d'abord des opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes de la matrice, de manière à obtenir une ligne ou une colonne dont la plupart des éléments sont nuls ! On développe alors le déterminant sur cette ligne ou cette colonne.

Reprenons le calcul de

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

On repère le 1 sur la deuxième ligne : il va servir pour annuler les autres coefficients sur la ligne. On procède donc par opérations sur les colonnes.

$$\begin{aligned} D &\stackrel{C_2 \leftarrow C_2 - 3C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -10 & 1 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{C_3 \leftarrow C_3 + C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -10 & 4 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

On place alors les signes sur ce déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1^+ & -5^- & 4^+ \\ 1^- & 0^+ & 0^- \\ 3^+ & -10^- & 4^+ \end{vmatrix}$$

On peut alors développer par rapport à la deuxième ligne :

$$D = - \begin{vmatrix} -5 & 4 \\ -10 & 4 \end{vmatrix} = -5 \times 4 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -20.$$

Exercice 2.4.1.

Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 9 & 8 \\ 3 & 7 & 6 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

Exercice 2.4.2.

Avec $M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, calculer $\det(\lambda I_3 - M)$, en prenant soin de factoriser par $\lambda - 1$.

Exercice 2.4.3.

On pose pour tout $n \geq 1$ le déterminant $n \times n$ suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Calculer D_1 , D_2 , D_3 , puis calculer D_n en fonction de D_{n-1} et de D_{n-2} pour chaque $n \geq 3$. En déduire la valeur de D_n pour tout $n \geq 1$.

3 Propriétés du déterminant matriciel**Proposition 3.0.1.**

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

Démonstration.

Admis □



De manière générale, $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$.

Exercice 3.0.2.

Considérons $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer $\det(A)$, $\det(B)$ et $\det(A+B)$. Est-ce que $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$?

Théorème 3.0.3.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$. Dans ce cas, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

Démonstration.

Si A est inversible, alors

$$\det(A) \det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I_n) = 1.$$

Ainsi, $\det(A) \neq 0$ et $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Réciproquement, si A n'est pas inversible, alors $\text{rg}(A) \leq n-1$. En notant $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A , on sait que $\text{rg}(A) = \text{rg}(C_1, \dots, C_n)$. Ainsi, la famille $(C_1, \dots, C_n)$ est liée, donc $\det(A) = 0$. □

Exercice 3.0.4.

Reprendre l'exercice 2.4.2. Pour quels λ la matrice $\lambda I_3 - M$ est-elle inversible ?

Corollaire 3.0.5.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $\det(PAP^{-1}) = \det A$.

Démonstration.

On a, par le résultat précédent, $\det(P) \neq 0$ et

$$\begin{aligned} \det(PAP^{-1}) &= \det(P) \det(A) \det(P^{-1}) \\ &= \underbrace{\det(P) \det(P)^{-1}}_{=1} \det(A) \\ &= \det(A) \end{aligned}$$

□

4 Autres déterminants**4.1 Déterminant d'un endomorphisme****Lemme 4.1.1.**

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases de E et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Alors, $\det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f))$.

Démonstration.

Soit $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, $N = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$ et $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})(f) \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. Par la formule de changement de base,

$$M = PNP^{-1}.$$

Par le résultat précédent, on a alors $\det(M) = \det(N)$. □

Définition 4.1.2.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On appelle *déterminant* de f , noté $\det(f)$, le déterminant de la matrice de f dans n'importe quelle base de E .

Exercice 4.1.3.

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$:

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x - 2y + z \\ 4x + z \\ -3y + 2z \end{pmatrix}.$$

Calculer $\det(f)$.

Exercice 4.1.4.

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$:

$$f : P \mapsto P(X+1) + XP(1).$$

Calculer $\det(f)$.

Faire de même sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Toutes les propriétés des déterminants des matrices se traduisent immédiatement en termes d'endomorphismes :

Proposition 4.1.5.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Alors, $\det(g \circ f) = \det(g) \det(f)$.

Démonstration.

Soit $\mathcal{B}$ une base de E . On a par les règles usuelles :

$$\begin{aligned} \det(g \circ f) &= \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f)) \\ &= \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) \\ &= \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g)) \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) \\ &= \det(g) \det(f). \end{aligned}$$

□

Théorème 4.1.6.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Alors, l'endomorphisme f est bijectif (autrement dit, est un automorphisme) si et seulement si $\det f \neq 0$. Dans ce cas, $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$.

Démonstration.

Soit $\mathcal{B}$ une base de E . On sait que f est bijectif si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est inversible, donc si et seulement si $\det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) \neq 0$, donc si et seulement si $\det(f) \neq 0$. □

Exercice 4.1.7.

Reprendre les exercices 4.1.3 et 4.1.4.

À chaque fois, les endomorphismes f sont-ils des automorphismes des espaces considérés ?

Exercice 4.1.8.

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$:

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - 2y \\ 3x - 4y \end{pmatrix}.$$

Pour quel(s) paramètre(s) λ l'endomorphisme $\lambda \text{Id}_{\mathbb{R}^2} - f$ est-il non bijectif ? Pour ces λ , déterminer $\text{Ker}(\lambda \text{Id}_{\mathbb{R}^2} - f)$.

4.2 Déterminant d'une famille de vecteurs**Définition 4.2.1.**

Soit E un espace vectoriel de dimension n , $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ une famille de n vecteurs de E , et $\mathcal{B}$ une base de E . On appelle *déterminant* de $\mathcal{V}$ dans la base $\mathcal{B}$ le déterminant de la matrice des vecteurs $(v_1, \dots, v_n)$ dans la base $\mathcal{B}$. On le note $\det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n)$. On a donc :

$$\det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n)).$$



En dimension n , on ne peut considérer que des déterminants de n vecteurs.



Contrairement à la matrice d'un endomorphisme, le résultat dépend du choix de la base.

Théorème 4.2.2.

Soit E un espace vectoriel de dimension n , $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ une famille de n vecteurs de E .

La famille $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n) \neq 0$.

Démonstration.

Soit $\mathcal{B}$ une base de E . On sait que $\mathcal{V}$ est une base de E si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{V})$ est inversible, donc si et seulement si $\det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{V})) \neq 0$, donc si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{V}) \neq 0$. □

Exercice 4.2.3.

Dans $\mathbb{R}^2$, on note $\mathcal{B}$ la base canonique, et

$$\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

À l'aide d'un calcul de déterminant, montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. On considère

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v})$ ainsi que $\det_{\mathcal{C}}(\vec{u}, \vec{v})$

Exercice 4.2.4.

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

À l'aide d'un calcul de déterminant, donner une équation de $\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$.

Exercice 4.2.5.

On considère un espace vectoriel E , muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

La famille $(e_2 + e_3, e_1 + e_3, e_1 + e_2)$ est-elle une base de E ?