

I Rappels et compléments d'intégration

1 Intégration sur un segment

Dans tout cette partie, sauf mention du contraire, a et b sont deux réels vérifiant $a < b$, $\mathbb{K}$ vaut soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{C}$, et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ est une fonction continue.

1.1 Théorèmes d'intégration

Théorème 1.1.1 (Théorème fondamental du calcul différentiel).

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Alors :

1. Pour tout $a \in I$, la fonction

$$F_a : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

est une primitive de f sur I (plus précisément, c'est l'unique primitive de f s'annulant en a).

En particulier, F_a est dérivable, et pour tout $x \in I$, $F'_a(x) = f(x)$.

2. Si F est une primitive de f sur I , alors pour tout $a, b \in I$,

$$\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Remarque 1.1.2. $\triangleright$ En particulier, si F est une primitive de f sur I , les primitives de f sur I sont exactement les fonctions de la forme $F + c$, pour $c \in \mathbb{R}$.

$\triangleright$ En conséquence de ce théorème, on utilise la notation $\int_a^x f(t) dt$ (sans borne du bas) pour désigner une primitive « générique » de la fonction f .

$\triangleright$ Le théorème précédent se note aussi :

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x).$$

Exercice 1.1.3.

Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $\int_0^1 t^n dt$.

Théorème 1.1.4 (Intégration par parties).

Soit f une fonction continue et g une fonction de

classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a, b]$. Notons F une primitive de f sur $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b \overbrace{f(t)}^{\nearrow} \underbrace{g(t)}_{\searrow} dt = [F(t)g(t)]_a^b - \int_a^b F(t)g'(t) dt.$$

Exercice 1.1.5.

Calculer $\int_0^\pi t \sin t dt$.

Exercice 1.1.6.

Déterminer une primitive de la fonction $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Théorème 1.1.7 (Changement de variables).

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle J et à valeurs dans I . Soit $a, b \in J$. Alors

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du.$$

On dit que l'on a posé le changement de variable $u = \varphi(t)$.

Remarque 1.1.8 (« à la physicienne »).

En pratique, l'abus de notation « $u = \varphi(t)$, $du = \varphi'(t) dt$ » est courant... et fort pratique !

Exercice 1.1.9.

Calculer $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \left(\frac{1}{\tan^2(t)} + 1 \right) dt$ en posant $u = \tan(t)$.

Exercice 1.1.10.

Déterminer une primitive de $f : t \mapsto \frac{e^t}{1 + e^{2t}}$ sur $\mathbb{R}$ en posant $u = e^t$.

Exercice 1.1.11.

Calculer $\int_0^1 \sqrt{1 - t^2} dt$ en posant $t = \cos(u)$.

Calculer ensuite $\int_0^{\pi/2} \sin^2(u) du$ en posant $u = \frac{\pi}{2} - v$.

1.2 Positivité et nullité

On suppose ici que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, f est donc une fonction réelle.

Proposition 1.2.1 (Positivité).

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle I . Soit $a, b \in I$ et tels que $a \leq b$. Alors,

$$\int_a^b f(t) dt \geq 0.$$

Remarque 1.2.2.

L'hypothèse $a \leq b$ est fondamentale ! Par exemple $\int_1^0 1 dt = -1$.

Proposition 1.2.3 (Croissance).

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I . On suppose que $f \leq g$ (autrement dit, pour tout $x \in I$, $f(x) \leq g(x)$). Alors, si $a, b \in I$ vérifient $a \leq b$,

$$\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt.$$

Démonstration.

On dit que $g = f + (g - f)$ et on applique la proposition précédente à la fonction positive $g - f$. $\square$

Corollaire 1.2.4 (inégalité triangulaire).

Sous les mêmes hypothèses sur f :

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

Démonstration.

On a toujours $-|f| \leq f \leq |f|$, il suffit d'appliquer la propriété de croissance de l'intégrale (on a bien $a \leq b$) pour obtenir

$$-\int_a^b |f(t)| dt \leq \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b |f(t)| dt,$$

qui est exactement le résultat demandé. $\square$

Exercice 1.2.5.

Soit $n \geq 1$. Représenter la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $[n, n+1]$.

En proposant un encadrement judicieux, montrer que

$$\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{n}.$$

Simplifier ensuite le terme du milieu.

Il est évident que l'intégrale d'une fonction constamment nulle est nulle. La réciproque n'est pas toujours vraie, mais on peut énoncer la proposition suivante.

Théorème 1.2.6 (fondamental, mais malheureusement sans nom).

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Soit $a, b \in I$ vérifiant $a \neq b$. On suppose que :

- ▷ f est continue sur $[a, b]$;
- ▷ f est positive sur $[a, b]$;
- ▷ $\int_a^b f(t) dt = 0$.

Alors f est constamment nulle sur $[a, b]$. Autrement dit : pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) = 0$.



Le résultat cesse d'être vrai dès qu'au moins une des hypothèses n'est pas vérifiée.

Exercice 1.2.7.

Trouver un contre-exemple au théorème dans chacun des cas où une hypothèse cesse d'être réalisée.

Exercice 1.2.8.

Soit P un polynôme réel. On suppose que $\int_0^1 P^2(t) dt = 0$. Montrer que P est le polynôme nul.

1.3 Sommes de Riemann**Théorème 1.3.1** (de convergence des sommes de Riemann).

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Alors

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$$

Remarque 1.3.2.

On utilise (presque) toujours ce théorème dans le cas $a = 0$ et $b = 1$. On a alors, sous les mêmes hypothèses :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt$$

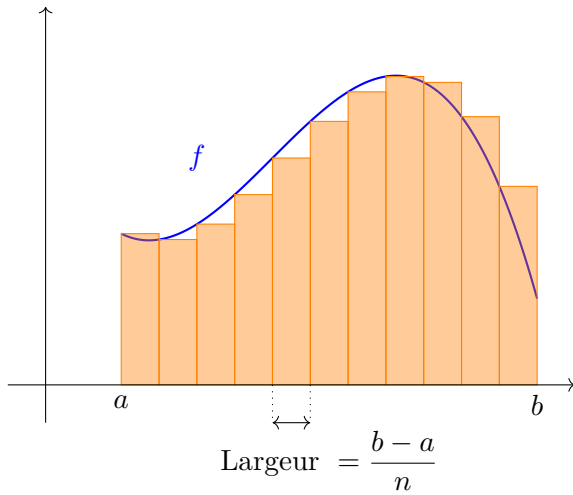
Le résultat est aussi valide en sommant de 1 à n :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt$$

Exemple 1.3.3.

Nous allons étudier la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$ de

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{k^2 + n^2}.$$

FIGURE 1 – Exemple de somme de Riemann ($n = 11$).

Pour faire apparaître une somme de Riemann, on a besoin d'effectuer deux actions :

- ▷ n'avoir plus que des termes de la forme $\frac{k}{n}$ (et pas de k « seuls ») ;
- ▷ factoriser $\frac{1}{n}$ devant la somme.

On écrit donc pour $k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{k}{k^2 + n^2} = \frac{n}{n^2} \frac{\frac{k}{n}}{\left(\frac{k}{n}\right)^2 + 1} = \frac{1}{n} \frac{\frac{k}{n}}{\left(\frac{k}{n}\right)^2 + 1},$$

ce qui donne

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\frac{k}{n}}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}.$$

On considère donc la fonction $f : t \mapsto \frac{t}{1+t^2}$, définie sur $[0, 1]$.

Cette fonction f est continue sur $[0, 1]$, on peut donc appliquer le théorème de convergence des sommes de Riemann :

$$S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt.$$

Exercice 1.3.4.

Calculer cette dernière intégrale.

Exercice 1.3.5.

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\frac{n+k}{n^3}}$.

1.4 Intégration d'une fonction complexe

Définition 1.4.1.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, il existe deux fonctions $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telles que, pour tout $t \in [a, b]$,

$$f(t) = g(t) + ih(t).$$

Lorsque g et h sont continues, on dit que f est continue. On définit alors

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b g(t) dt + i \int_a^b h(t) dt.$$

Remarque 1.4.2.

Dans cette définition, on a par exemple $g(t) = \operatorname{Re}(f(t))$ et

$$\int_a^b g(t) dt = \operatorname{Re} \left(\int_a^b f(t) dt \right).$$

Ainsi, par définition,

$$\begin{aligned} \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt &= \operatorname{Re} \left(\int_a^b f(t) dt \right), \\ \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt &= \operatorname{Im} \left(\int_a^b f(t) dt \right). \end{aligned}$$

Proposition 1.4.3.

Toutes les propriétés habituelles de l'intégrale réelle sont vraies pour l'intégrale complexe, en dehors des propriétés de positivité et de croissance.

Notamment, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ non nul,

$$\int_a^b e^{\alpha t} dt = \frac{e^{\alpha b} - e^{\alpha a}}{\alpha}.$$

Remarque 1.4.4.

En particulier, l'inégalité triangulaire est toujours vraie : lorsque $a \leq b$ et lorsque f est continue et à valeurs complexes,

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

Démonstration.

Admis. □

Exercice 1.4.5.

Calculer $\int_0^1 t + it^2 dt$.

Exercice 1.4.6.

En utilisant l'exponentielle complexe, calculer $\int_x^{\cos(t)} e^t dt$.

2 Extension au cas $b = +\infty$

Dans cette partie, on considère $a \in \mathbb{R}$ et deux fonctions $f, g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{K}$ continues, où $\mathbb{K}$ vaut soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{C}$.

2.1 Convergence de l'intégrale généralisée

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt.$$

L'objectif de ce chapitre est d'étendre la notion « d'aire sous la courbe » au cas des fonctions continues sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$. Dans cette situation, la portion de plan contenue entre la courbe de la fonction et l'axe des abscisses n'est plus bornée (elle s'étend « jusqu'à l'infini »). Toutefois, nous allons pouvoir distinguer deux situations :

- ▷ celle où l'on peut déterminer une aire algébrique finie à cette portion de plan (voir figure 3) ;
- ▷ celle où l'on ne peut attribuer une aire algébrique finie à cette portion de plan (voir figures 4 et 5).

Définition 2.1.1 (nature d'une intégrale généralisée).

On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ *converge* lorsque la quantité $\int_a^M f(t) dt$ admet une limite *finie* lorsque $M \rightarrow +\infty$. Sinon, on dit que cette intégrale *diverge*.

Si cette intégrale converge, on note alors

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_a^M f(t) dt.$$

Remarque 2.1.2.

La *nature* de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est son caractère convergent ou divergent.

Remarque 2.1.3.

Dans cette situation, on parle d'intégrale *généralisée*.

Lorsque l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge, le nombre $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ représente encore une aire (algébrique, voir figure 2) : celle de la portion du plan comprise entre la courbe de f , la droite d'équation $x = a$ et la droite d'équation $y = 0$ (voir figure 3). C'est ici une aire finie, mais cette portion de plan n'est pas bornée.

La borne $+\infty$ est une *singularité* de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$. Nous reviendrons ultérieurement sur ce vocabulaire, lorsque nous étendrons la notion d'intégrale généralisée à toutes les bornes possibles.

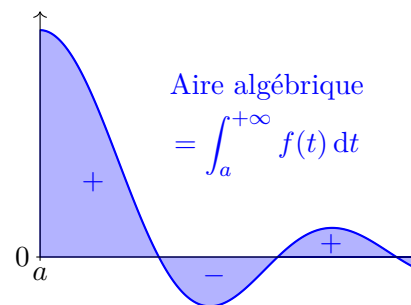


FIGURE 2 – $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est une aire algébrique.

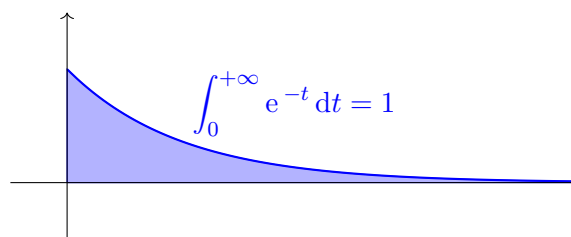


FIGURE 3 – Exemple d'intégrale généralisée convergente.

$$\int_1^M \frac{dt}{t} = \ln(M) \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} +\infty$$

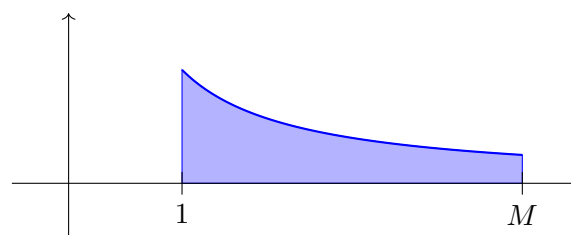


FIGURE 4 – Exemple d'intégrale généralisée divergente.



On déterminera *toujours* la nature d'une intégrale avant de la calculer.

Exercice 2.1.4.

Déterminer les natures et, le cas échéant, les valeurs

$$\int_0^M \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} M \sqrt{M} \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} +\infty$$

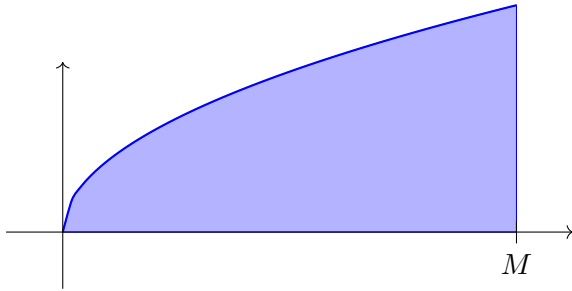


FIGURE 5 – Exemple d'intégrale généralisée divergente.

des intégrales généralisées suivantes.

1. $\int_1^{+\infty} e^{-3t} dt$
2. $\int_2^{+\infty} t e^{-2t} dt$
3. $\int_7^{+\infty} \ln(t) dt$
4. $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}$

Remarque 2.1.5.

Si $c \geq a$, alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ et $\int_c^{+\infty} f(t) dt$ ont même nature.

Lorsque ces intégrales convergent, on pourra dire que l'intégrale converge « en $+\infty$ ». Cela sera particulièrement utile lorsque nous devrons étudier la convergence d'une intégrale en ses deux bornes, par exemple pour $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$.

Théorème 2.1.6 (exemple de Riemann).

Si $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration.

Traisons le cas $\alpha \neq 1$. Soit $M \geq 1$, il suffit de calculer

$$\int_1^M \frac{dt}{t^\alpha} = \int_1^M t^{-\alpha} dt = \left[(\dots) t^{-\alpha+1} \right]_{t=1}^M = (\dots) \left(\frac{1}{M^{\alpha-1}} - 1 \right)$$

(compléter le calcul en trouvant la bonne constante).

Cette dernière quantité admet bien une limite finie si et seulement si $\alpha > 1$.

Pour le cas $\alpha = 1$, on effectue le calcul :

$$\int_1^M \frac{dt}{t} = \ln(M) \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Ainsi, l'exemple de Riemann diverge pour $\alpha = 1$. $\square$

Exercice 2.1.7.

Sans calcul, déterminer les natures des intégrales suivantes.

1. $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2 \sqrt{t}}$
2. $\int_5^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt[6]{t}}$
3. $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{t^2} dt$
4. $\int_1^{+\infty} e^{-\ln(t)} dt$

Proposition 2.1.8.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

Si $\alpha > 0$, on a alors

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}.$$

Démonstration.

Si $\alpha = 0$, alors on a toujours $e^{-\alpha t} = 1$, et donc pour tout $M \geq 0$:

$$\int_0^M e^{-\alpha t} dt = \int_0^M 1 dt = M \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Ainsi, $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ diverge.

Supposons $\alpha \neq 0$. Soit $M \geq 0$, il suffit de calculer

$$\int_0^M e^{-\alpha t} dt = \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} \right]_{t=0}^M = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha M}).$$

Si $\alpha < 0$, alors $-\alpha > 0$, donc $e^{-\alpha t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$, donc

$\int_0^M e^{-\alpha t} dt \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} +\infty$. Ainsi, l'intégrale diverge.

Si $\alpha > 0$, alors $e^{-\alpha t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, donc on a

$\int_0^M e^{-\alpha t} dt \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha}$, d'où le résultat. $\square$

Proposition 2.1.9 (linéarité de l'intégrale convergente).

Supposons que $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ convergent. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Alors, $\int_a^{+\infty} (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt$ converge et

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt \\ = \lambda \int_a^{+\infty} f(t) dt + \mu \int_a^{+\infty} g(t) dt. \end{aligned}$$

Exercice 2.1.10.

Déterminer les natures des intégrales suivantes.

$$1. \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t^2} - 2e^{-3t} \right) dt$$

$$2. \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} + e^{-t} \right) dt$$

Exercice 2.1.11 (règle CV+DIV=DIV, fondamental).

Soit $f, g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continues, telles que

$$\triangleright \int_a^{+\infty} f(t) dt \text{ converge ;}$$

$$\triangleright \int_a^{+\infty} g(t) dt \text{ diverge.}$$

Montrer que $\int_a^{+\infty} (f(t) + g(t)) dt$ diverge.

Exercice 2.1.12.

Déterminer la nature de $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{3}{t^2} \right) dt$.

Proposition 2.1.13 (positivité).

Supposons que f est *positive* (i.e. $\forall t \geq a, f(t) \geq 0$), et que $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge.

$$\text{Alors, } \int_a^{+\infty} f(t) dt \geq 0.$$

Démonstration.

Soit $M \geq a$, par positivité de l'intégrale (sur un segment),

$$\int_a^M f(t) dt \geq 0.$$

Par passage à la limite lorsque $M \rightarrow +\infty$, $\int_a^{+\infty} f(t) dt \geq 0$. □

Proposition 2.1.14 (croissance).

Supposons que $f \leq g$ (i.e. $\forall t \geq a, f(t) \leq g(t)$), et que $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ ainsi que $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ convergent.

$$\text{Alors, } \int_a^{+\infty} f(t) dt \leq \int_a^{+\infty} g(t) dt.$$

Démonstration.

Par linéarité, $\int_a^{+\infty} (g(t) - f(t)) dt$ converge, or pour tout $t \geq a$, $g(t) - f(t) \geq 0$, donc par positivité de l'intégrale on a

$$0 \leq \int_a^{+\infty} (g(t) - f(t)) dt = \int_a^{+\infty} g(t) dt - \int_a^{+\infty} f(t) dt.$$

On a donc bien le résultat. □

2.2 Cas des fonctions positives.**Rappel 2.2.1.**

On note $f \geq 0$ la phrase « la fonction f est positive », ce qui signifie

$$\forall t \in [a, +\infty[, f(t) \in \mathbb{R}_+.$$

Cela veut notamment dire que f est à valeurs réelles.



Dans toute cette partie, la condition de positivité des fonctions que l'on intègre est fondamentale.

Lemme 2.2.2.

Si f est positive, alors la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est croissante.

Démonstration.

Soit $x, y \geq a$, supposons que $x \leq y$, alors par la relation de Chasles :

$$\int_a^y f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^y f(t) dt$$

Ainsi, comme $y > x$ et comme f est positive, par positivité de l'intégrale,

$$\int_x^y f(t) dt \geq 0,$$

donc

$$\int_a^y f(t) dt \geq \int_a^x f(t) dt,$$

donc cette fonction est croissante.

On pouvait aussi voir que $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de f , donc est dérivable, et que pour tout $x \geq a$:

$$F'(x) = f(x) \geq 0.$$

Ainsi, F est croissante. □

Proposition 2.2.3.

Si f est positive et continue sur $[a, +\infty[$, et si $\int_a^{+\infty} f(t) dt = 0$, alors $\forall t \geq a, f(t) = 0$.

Démonstration.

Soit $M \geq a$, on a par positivité de l'intégrale et par croissance de $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$:

$$0 \leq \int_a^M f(t) dt \leq \int_a^{+\infty} f(t) dt = 0.$$

On a donc $\int_a^M f(t) dt = 0$, donc comme f est continue et positive, on a pour tout $t \in [a, M] : f(t) = 0$. Comme M est quelconque, alors pour tout $t \geq a, f(t) = 0$. □

Proposition 2.2.4.

Supposons que la fonction f est positive. Alors, $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est majorée.

Démonstration.

Cela découle immédiatement du théorème de limite monotone. $\square$

Théorème 2.2.5 (comparaison).

Supposons que f et g sont positives et vérifient $f \leq g$ (i.e. $\forall t \geq a, 0 \leq f(t) \leq g(t)$).

Si $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge aussi.

Si $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ diverge, alors $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ diverge aussi.

Démonstration.

Comme $x \mapsto \int_a^x g(t) dt$ est croissante et admet une limite finie, on peut écrire pour tout $x \geq a$:

$$\int_a^x f(t) dt \leq \int_a^x g(t) dt \leq \int_a^{+\infty} g(t) dt.$$

Le membre de droite est une constante, donc $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est majorée. Comme f est positive, son intégrale converge. $\square$

Exercice 2.2.6.

Déterminer les natures des intégrales $\int_2^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt$ et de $\int_2^{+\infty} \frac{2 + \sin(t)}{t} dt$.

Corollaire 2.2.7 (très utile, légèrement HP).

Supposons que f et g sont positives et vérifient $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} g(t)$.

Alors, $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ ont la même nature, c'est-à-dire qu'elles convergent ou divergent simultanément.

Démonstration.

Comme $\frac{f(t)}{g(t)} \underset{t \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1$, il existe $A \geq a$ tel que pour tout $t \geq A$:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{f(t)}{g(t)} \leq 2,$$

soit, comme g est positive, pour $t \geq A$,

$$\frac{g(t)}{2} \leq f(t) \leq 2g(t).$$

Il suffit d'appliquer le théorème 2.2.5 à chaque inégalité. $\square$

Exercice 2.2.8.

Déterminer la nature de $\int_1^{+\infty} \tan\left(\frac{1}{t\sqrt{t}}\right) dt$ et de $\int_1^{+\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt[4]{t}}\right)\right) dt$.

Corollaire 2.2.9 (très utile, légèrement HP).

Supposons que f et g sont positives et vérifient $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(g(t))$.

Si $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge aussi.

Démonstration.

Comme $\frac{f(t)}{g(t)} \underset{t \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe $A \geq a$ tel que pour tout $t \geq A$:

$$0 \leq \frac{f(t)}{g(t)} \leq 1,$$

soit, comme g est positive, pour $t \geq A$,

$$0 \leq f(t) \leq g(t).$$

Il suffit d'appliquer le théorème 2.2.5. $\square$

Exercice 2.2.10 (à retenir).

Quelle est la limite en $+\infty$ de $t^3 e^{-t}$? En déduire que $\int_0^{+\infty} t e^{-t} dt$ converge.

En réalisant une intégration par parties, déterminer la valeur de $\int_0^{+\infty} t e^{-t} dt$.

Exercice 2.2.11.

Déterminer la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^3} dt$ et de $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} dt$.

Corollaire 2.2.12 (moins utile, légèrement HP).

Supposons que f et g sont positives et vérifient $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(g(t))$.

Si $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge aussi.

2.3 Convergence absolue.**Définition 2.3.1.**

Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ continue. On dit que $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge absolument, ou que f est intégrable sur $[a, +\infty[$, si $\int_a^{+\infty} |f(t)| dt$ converge.

Remarque 2.3.2.

La convergence absolue de l'intégrale de f signifie donc la convergence de l'intégrale de $|f|$.

On pourra aussi dire que f est « intégrable en $+\infty$ ».

La valeur de $\int_a^{+\infty} |f(t)| dt$ est l'aire (géométrique, *i.e.* non algébrique) de la portion de plan comprise entre la courbe de f et l'axe (Ox) (voir figure 6).

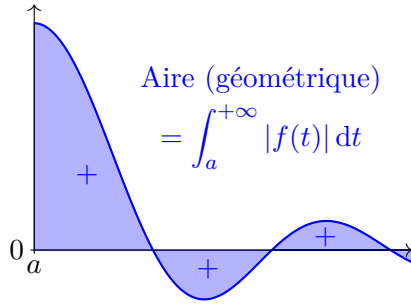


FIGURE 6 – $\int_a^{+\infty} |f(t)| dt$ est une aire géométrique.

Remarque 2.3.3.

Comme pour tout t , $|f(t)| \geq 0$, on pourra appliquer les arguments de comparaison de fonctions positives pour étudier la convergence absolue d'une intégrale.

Exemple 2.3.4.

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-t} dt$ converge absolument. En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq |\sin(t)e^{-t}| = |\sin(t)|e^{-t} \leq e^{-t}.$$

Or, on sait que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ converge. Par comparaison d'intégrales positives, l'intégrale $\int_0^{+\infty} |\sin(t)e^{-t}| dt$ converge, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-t} dt$ converge absolument.

Théorème 2.3.5 (CV absolue $\Rightarrow$ CV, inégalité triangulaire).

Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ continue. Si $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge absolument, $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge et

$$\left| \int_a^{+\infty} f(t) dt \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(t)| dt.$$

Démonstration.

Admis. □

Exemple 2.3.6 (reprise de 2.3.4).

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-t} dt$ converge, car elle converge absolument.

Remarque 2.3.7.

On peut voir cela comme une généralisation de l'inégalité triangulaire vue en première année. Cela signifie que l'aire algébrique entre la courbe et l'axe (Ox) (figure 2) est inférieure (en valeur absolue) à l'aire géométrique correspondante (figure 6).

Proposition 2.3.8.

Soit $f, g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ continues et intégrables sur $[a, +\infty[$, soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors, $\lambda f + \mu g$ est intégrable sur $[a, +\infty[$.

Démonstration.

Admis. □

Remarque 2.3.9.

Ceci signifie que l'ensemble des fonctions intégrables sur $[a, +\infty[$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions définies sur $[a, +\infty[$. Sur ce sev, l'application $f \mapsto \int_a^{+\infty} f(t) dt$ est linéaire.

Théorème 2.3.10 (comparaison à une fonction intégrable).

Supposons que pour tout $t \geq a$, $|f(t)| \leq |g(t)|$.

Si $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ converge absolument, alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge aussi absolument. Notamment, $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge.

Démonstration.

On applique le théorème 2.2.5 : par comparaison à une fonction positive, $\int_a^{+\infty} |f(t)| dt$ converge, donc $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge absolument, donc converge. □

Exercice 2.3.11.

Montrer que $\int_1^{+\infty} \cos(t) \ln \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) dt$ converge.

Corollaire 2.3.12 (très utile).

Supposons que f et g vérifient $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} g(t)$.

Alors, $\int_a^{+\infty} |f(t)| dt$ et $\int_a^{+\infty} |g(t)| dt$ ont la même nature, c'est-à-dire que les deux intégrales $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ sont soit toutes les deux absolument convergentes, soit toutes les deux non absolument convergentes.

Notamment, si $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ converge absolument, alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge aussi absolument. Notamment, $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge.

Démonstration.

On a immédiatement $|f(x)| \sim |g(x)|$, il suffit d'appliquer le corollaire 2.2.7. $\square$

Exercice 2.3.13.

Déterminer la nature de $\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{\cos(t)}{t^2}\right) dt$.

Corollaire 2.3.14 (très utile).

Supposons que f et g vérifient $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(g(t))$.

Si $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ converge absolument, alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge aussi absolument. Notamment, $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge.

Démonstration.

On a immédiatement $|f(x)| = o|g(x)|$, il suffit d'appliquer le corollaire 2.2.9. $\square$

Remarque 2.3.15 (astuce du t^2).

Lorsque l'intégrande s'écrit sous la forme « petite fonction $\times e^{-\alpha t}$ », où $\alpha > 0$ et où le « petite fonction » s'entend au sens des croissances comparées (typiquement : une fonction polynomiale, éventuellement multipliée par des fonctions bornées), alors on pensera à multiplier par t^2 l'intégrande puis à passer à la limite en $+\infty$, afin de montrer que cette intégrande est un o de $\frac{1}{t^2}$.

Exercice 2.3.16.

On pose $f(t) = t \sin(\sqrt{t}) e^{-3t}$. On considère l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$.

1. Déterminer la limite de $t^2 f(t)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. Qu'en déduit-on sur $f(t)$ au voisinage de $+\infty$?
2. Déterminer la nature de l'intégrale étudiée.

Corollaire 2.3.17 (moins utile).

Supposons que f et g vérifient $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(g(t))$.

Si $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ converge absolument, alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge aussi absolument. Notamment, $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge.

Démonstration.

On a immédiatement $|f(t)| \underset{t \rightarrow +\infty}{O} |g(t)|$, il suffit d'appliquer le corollaire 2.2.12. $\square$

2.4 Schéma d'étude

Lorsque l'on étudie la convergence de $\int_a^{+\infty} f(t) dt$, on respectera bien les étapes suivantes.

1. Vérifier que f est continue sur $[a, +\infty[$ (la plupart du temps, on écrit « f est continue sur [...] par opérations sur les fonctions continues »).
2. Si f est combinaison linéaire de plusieurs fonctions simples, on étudie chacune de ces fonctions séparément.
3. On essaie de déterminer un équivalent simple de f .
Supposons que l'on ait obtenu $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} g(t)$. On travaille alors sur g , et non sur f . Parfois, on ne peut simplifier f : on travaille avec $g = f$!
4. Si g n'est pas positive, on étudie la convergence absolue de l'intégrale, c'est-à-dire que l'on s'intéresse à $\int_a^{+\infty} |g(t)| dt$ (et l'on peut poursuivre directement au point suivant, en considérant $|g(t)|$ à la place de $g(t)$).
5. Si g est positive, on essaie de comparer g à une fonction simple/de référence. Voici les principales idées.

- a) Faire apparaître un exemple de Riemann dans g .
- b) Multiplier par un terme de la forme de t^α (où $\alpha > 1$) et utiliser les croissances comparées pour obtenir $t^\alpha g(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, et donc $g(t) = o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$. C'est souvent le cas avec des termes de la forme « puissance $\times$ exponentielle ».
- c) Utiliser une majoration (souvent amenée par l'énoncé ou les questions précédentes). Penser à utiliser les majorations $|\cos(t)| \leq 1$ et $|\sin(t)| \leq 1$.

6. Conclure en utilisant un argument de comparaison à une fonction intégrable, puis éventuellement en disant « l'intégrale converge absolument, donc converge ».
7. Si rien de cela ne fonctionne, on peut essayer *en dernier recours* de calculer directement $\int_a^x f(t) dt$ (où x est fixé), puis de passer à la limite lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Ensuite, on pourra parfois effectuer le calcul de l'intégrale. On pensera notamment à effectuer une intégration par parties sur les intégrales $\int_a^x f(t) dt$, puis à faire tendre x vers $+\infty$.

Pour les fractions rationnelles (quotients de polynômes), il existe des techniques qui permettent de les décomposer en fractions plus simples et qui sont hors programme. On retrouve toutefois souvent les décompositions suivantes :

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$$

$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{1}{2(t-1)} - \frac{1}{2(t+1)}$$

Exercice 2.4.1.

Justifier la convergence de $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^2-1}$, puis donner sa valeur.

3 Méthodes numériques

3.1 Fonction quad

La bibliothèque `scipy.integrate` fournit la fonction `quad`, qui prends trois arguments :

- ▷ une fonction `f` ;
- ▷ un flottant `a` (ou éventuellement la valeur `-inf` de `numpy`) ;
- ▷ un flottant `b` (ou éventuellement la valeur `inf` de `numpy`).

Un appel de `quad(f,a,b)` renvoie alors un couple constitué de :

- ▷ une valeur approchée de $\int_a^b f(t) dt$;
- ▷ un majorant de l'erreur réalisée lors de cette approximation.

Prenons comme exemple la fonction $f : t \mapsto e^{-t^2}$. Nous allons calculer des valeurs approchées des intégrales

$$I = \int_0^1 e^{-t^2} dt, \quad J = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

On utilise pour cela le code suivant.

```
1 from scipy.integrate import quad
2 import numpy as np
3
4 def f(x) :
5     return np.exp(-x**2)
6
7 I, eI = quad(f,0,1)
8 J, eJ = quad(f,0,np.inf)
```

On sait que

$$J = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

On peut donc vérifier la qualité de l'approximation donnée en évaluant l'expression suivante.

```
9 abs(J - .5*np.pi**.5) < eJ
```

3.2 Méthode des rectangles

Le fait d'approcher une intégrale par la somme des aires de rectangles dont les bases forment une subdivision régulière de $[a,b]$ s'appelle la *méthode des rectangles* (voir la figure 1 pour un exemple). Il y a une infinité de manières de choisir la hauteur de ces rectangles. La figure 1 correspond à la situation où la hauteur de chaque rectangle est fixée sur son côté gauche : on parle de la méthode des rectangles à gauche.

Le théorème 1.3.1 montre que l'approximation d'une intégrale réalisée par la méthode des rectangles (à gauche) converge vers la valeur de l'intégrale.

On la calcule aisément.

```
10 def rectangle(f, a, b, n) :
11     S = 0
12     pas = (b-a)/n
13     for k in range(n) :
14         S = S + f(a+k*pas)
15     return S*pas
```

On peut alors l'appliquer à la fonction `f` codée précédemment.

```
16 I2 = rectangle(f,0,1,1000)
```