

II Compléments d'algèbre linéaire

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $n, p \in \mathbb{N}^*$.

1 Compléments sur les matrices

1.1 Transposition

Définition 1.1.1.

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle *transposée* de A la matrice

$$A^\top = (a_{j,i})_{1 \leq j \leq p, 1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}).$$

Concrètement, c'est la matrice obtenue en transformant chaque ligne de A en colonne, et réciproquement, ce qui revient à effectuer une symétrie par rapport à la diagonale de A .

Exemple 1.1.2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.1.3.

Si X, Y sont deux vecteurs colonnes de $\mathbb{R}^3$, alors $X^\top Y$ est le produit scalaire de X et Y . En particulier, $X^\top X = \|X\|^2$.

Remarque 1.1.4.

On utilise parfois la notation ${}^t A$.

Proposition 1.1.5.

La transposition $A \mapsto A^\top$ définit une application linéaire de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. Autrement dit, si $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors

$$(\lambda A + \mu B)^\top = \lambda A^\top + \mu B^\top.$$

Proposition 1.1.6.

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors

$$(AB)^\top = B^\top A^\top.$$

Remarque 1.1.7.

Le changement dans l'ordre des facteurs entre A et B est en quelque sorte « obligatoire » si on veut que les tailles des matrices soient compatibles avec le produit matriciel.

Exemple 1.1.8.

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 3 & -4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1+6+15 & -6-8-6 \\ 4+15+30 & -24-20-12 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 22 & -20 \\ 49 & -56 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc

$$(AB)^\top = \begin{pmatrix} 22 & 49 \\ -20 & -56 \end{pmatrix}.$$

$$\text{D'autre part, } B^\top = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -6 & -4 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \text{ donc}$$

$$B^\top A^\top = \begin{pmatrix} 1+6+15 & 4+15+30 \\ -6-8-6 & -24-20-12 \end{pmatrix} = (AB)^\top.$$

Proposition 1.1.9.

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $(A^\top)^\top = A$.

Démonstration.

On effectue une symétrie par rapport à la diagonale de A , et on réeffectue cette symétrie : on revient donc sur la matrice de départ. $\square$

Proposition 1.1.10.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, A est inversible si et seulement si $A^\top$ est inversible. Dans ce cas, on a

$$(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top.$$

Démonstration.

Si A est inversible, alors $AA^{-1} = I_n$ donc $(AA^{-1})^\top = I_n^\top = I_n$, autrement dit $(A^{-1})^\top A^\top = I_n$, ce qui montre que $A^\top$ est inversible, d'inverse $(A^{-1})^\top$. De même pour la réciproque. $\square$

Définition 1.1.11.

Une matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite :

- ▷ *symétrique* si $M^\top = M$;
- ▷ *antisymétrique* si $M^\top = -M$.

Exemple 1.1.12.

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ est symétrique, la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \\ -3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

Exercice 1.1.13.

Donner la forme générale d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique de dimensions 2×2 , 3×3 et $n \times n$.

Remarque 1.1.14.

La diagonale d'une matrice antisymétrique est nécessairement nulle.

Définition 1.1.15.

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques de taille $n \times n$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de taille $n \times n$:

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid M^\top = M \right\}$$

$$\mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid M^\top = -M \right\}$$

Proposition 1.1.16.

$\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et

$$\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Démonstration.

C'est un bon exercice de vérifier « à la main » que $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On peut aussi en donner une démonstration plus abstraite. Comme la transposition est linéaire, alors $M \mapsto M^\top - M$ et $M \mapsto M^\top + M$ sont des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, dont $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont les noyaux : ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si $1 \leq i, j \leq n$, notons $E_{i,j}$ la matrice de taille $n \times n$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui d'indice (i, j) , qui vaut 1 (c'est une matrice élémentaire).

Notons $\mathcal{D}$ la famille $(E_{1,1}, \dots, E_{n,n})$ (matrices élémentaires diagonales) : cette famille contient n vecteurs de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$.

Notons $\mathcal{T}$ la famille $(E_{i,j} + E_{j,i})_{1 \leq i < j \leq n}$ et $\mathcal{T}'$ la famille $(E_{i,j} - E_{j,i})_{1 \leq i < j \leq n}$: ces deux familles contiennent chacune $\frac{n(n-1)}{2}$ vecteurs, respectivement de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et de $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Il suffit de remarquer que la concaténation de $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{T}$ est une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et que $\mathcal{T}'$ est une base de $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$. $\square$

Théorème 1.1.17.

$\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Ainsi,

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K}).$$

Cela signifie que toute matrice carrée s'écrit de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Démonstration.

On sait déjà que $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont deux sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Même si cela n'est pas très utile, on peut vérifier que $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont en somme directe. En effet, si une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est à la fois symétrique et antisymétrique, alors on a $M^\top = M = -M$, donc $M = 0$.

Montrons maintenant que $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires par analyse-synthèse. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Analyse. Supposons qu'il existe une matrice symétrique S et une matrice antisymétrique A vérifiant $M = S + A$. Par linéarité de la transposée, on a donc $M^\top = S^\top + A^\top$. En sommant ces deux égalités, on a donc $M + M^\top = 2S$. En les soustrayant, on a donc $M - M^\top = 2A$. On a donc

$$S = \frac{1}{2}(M + M^\top) \text{ et } A = \frac{1}{2}(M - M^\top).$$

Synthèse. Posons $S = \frac{1}{2}(M + M^\top)$ et $A = \frac{1}{2}(M - M^\top)$. En sommant ceci, on a immédiatement $M = S + A$. Ensuite, par linéarité de la transposition,

$$S^\top = \frac{1}{2}(M^\top + (M^\top)^\top) = \frac{1}{2}(M^\top + M) = S.$$

De même,

$$A^\top = \frac{1}{2}(M^\top - (M^\top)^\top) = \frac{1}{2}(M^\top - M) = -A.$$

Ainsi, S et A sont respectivement symétrique et antisymétrique. $\square$

Exercice 1.1.18.

Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Décomposer M comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

1.2 Trace**Définition 1.2.1.**

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle *trace* de A le nombre

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i} = a_{1,1} + a_{2,2} + \dots + a_{n,n} \in \mathbb{K}.$$

Concrètement, la trace de A est la somme de ses coefficients diagonaux.

Remarque 1.2.2.

Une matrice non carrée n'a pas de diagonale, donc pas de trace !

Exemple 1.2.3.

$$\text{Tr} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 1 + 5 + 9 = 15.$$

Proposition 1.2.4.

L'application Tr est une application linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Autrement dit, si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors

$$\text{Tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \text{Tr}(A) + \mu \text{Tr}(B).$$

Démonstration.

Les coefficients diagonaux de $\lambda A + \mu B$ sont donnés par la combinaison linéaire correspondante des coefficients diagonaux de A et de B . $\square$

Proposition 1.2.5.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(A^\top)$.

Démonstration.

Il suffit de voir que A et $A^\top$ ont les mêmes coefficients diagonaux. $\square$

Remarque 1.2.6.

Pièges à éviter :

- ▷ La trace de la matrice identité n'est pas égale à 1, mais à n .
- ▷ Il n'est pas vrai en général que $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(A)\text{Tr}(B)$. Par exemple, si on prend $A = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B) = 0$, pourtant $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(A^2) = \text{Tr}(I_2) = 2$.

Proposition 1.2.7.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Alors,

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA).$$

Démonstration.

Notons $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$ les coefficients de A et de B , respectivement.

Si $1 \leq i, j \leq n$, notons

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j}$$

et si $1 \leq i, j \leq p$, notons

$$\gamma_{i,j} = \sum_{k=1}^n b_{i,k} a_{k,j}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \text{Tr}(AB) &= \sum_{i=1}^n c_{i,i} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{i,j} b_{j,i} \\ &= \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n b_{j,i} a_{i,j} \\ &= \sum_{j=1}^p \gamma_{j,j} \\ &= \text{Tr}(BA). \end{aligned}$$

$\square$

Exercice 1.2.8.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 3 & -4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

Calculer AB , BA et les traces de ces deux matrices.

Remarque 1.2.9.

Pour revenir au deuxième « piège » cité plus haut, on se rend compte dans cet exemple qu'il est même possible de parler de $\text{Tr}(AB)$ sans même que $\text{Tr}(A)$ ou $\text{Tr}(B)$ n'existe (puisque A et B ne sont pas carrées).

Proposition 1.2.10.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, alors

$$\text{Tr}(PAP^{-1}) = \text{Tr}(A).$$

Autrement dit, deux matrices semblables ont même trace.

Démonstration.

En utilisant 1.2.7 :

$$\text{Tr}(PAP^{-1}) = \text{Tr}(AP^{-1}P) = \text{Tr}(AI_n) = \text{Tr}(A).$$

$\square$

Remarque 1.2.11.

On dit aussi que la trace est un invariant de similitude.

Exercice 1.2.12.

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Exprimer $\text{Tr}(A^\top B)$ (on pourra commencer par le faire pour $n = 2$).

Que dire si $\text{Tr}(A^\top A) = 0$?

Lemme 1.2.13.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ deux bases de E . Alors,

$$\text{tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) = \text{tr}(\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f)).$$

Démonstration.

Avec $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = P \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) P^{-1}$. Il suffit de conclure avec la proposition 1.2.10. $\square$

Remarque 1.2.14.

La trace est donc invariante par changement de base.

Définition 1.2.15.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On appelle *trace* de f , notée $\text{Tr}(f)$, la trace de la matrice représentant l'application f dans n'importe quelle base de E .

Ainsi, pour tout base $\mathcal{B}$ de E ,

$$\text{Tr}(f) = \text{Tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)).$$

Exercice 1.2.16.

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}_2[X]$ qui, à un polynôme P , associe sa tangente au point d'abscisse 1. Autrement dit, pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $f(P) = (X - 1)P'(1) + P(1)$.

Déterminer la matrice de f dans la base canonique, puis dans la base $(1, X - 1, (X - 1)^2)$. Comparer les traces des deux matrices.

1.3 Polynômes de matrices**Définition 1.3.1.**

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, que l'on écrit

$$P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_dX^d,$$

où $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{K}$, soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors,

$$P(M) = a_0I_n + a_1M + \cdots + a_dM^d.$$

Remarque 1.3.2.

Ainsi, $1(M) = I_n$. Il convient de toujours faire attention au coefficient constant !

Remarque 1.3.3 (polynôme annulateur).

Si $P(M) = 0$, on dit que P est un polynôme *annulateur* de la matrice M .

Exercice 1.3.4.

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P(X) = X^2 - X - 2$.

Calculer $P(A)$, et en déduire que A est inversible. Exprimer A^{-1} , en fonction de A notamment.

Remarque 1.3.5.

On peut de même définir la notion de polynôme d'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$.

1.4 Sous-espaces stables d'un endomorphisme**Définition 1.4.1.**

Soit f un endomorphisme de E . Soit F un sous-espace vectoriel de E . On dit que F est *stable* par f si $f(F) \subset F$. Autrement dit si, pour tout $v \in F$, $f(v) \in F$.

Exemple 1.4.2. $\triangleright$ Les sous-espaces « triviaux » $F = E$ et $F = \{0\}$ sont stables par tout endomorphisme.

$\triangleright$ Dans $E = \mathbb{R}[X]$, on considère l'endomorphisme $D: P \mapsto P'$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'espace $F = \mathbb{R}_n[X]$ est stable par D . En revanche, l'espace $G = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = 0\}$ n'est pas stable par D .

Exercice 1.4.3.

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + y + z = 0$ et l'endomorphisme

$$u: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x & +2y & +z \\ -x & & +z \\ 2x & +2y & +2z \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\mathcal{P}$ est stable par u .

Proposition 1.4.4.

Soit F, G deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires (i.e. $E = F \oplus G$), soit $\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F et $\mathcal{B}_G = (e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base de G . Alors, la famille

$$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$$

est une base de E .

Démonstration.

Comme $E = F \oplus G$, on a $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G) = p + (n - p) = n$.

Il suffit donc de montrer que $\mathcal{B}$ est libre. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, supposons que

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0_E.$$

On l'écrit

$$\underbrace{\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p}_{\in F} + \underbrace{\lambda_{p+1} e_{p+1} + \cdots + \lambda_n e_n}_{\in G} = 0_E.$$

Comme la somme $F + G$ est directe, on obtient

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p = \lambda_{p+1} e_{p+1} + \cdots + \lambda_n e_n = 0_E.$$

Comme les familles $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ sont libres, on obtient

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = \lambda_{p+1} = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Ainsi, $\mathcal{B}$ est libre, et est donc une base de E . $\square$

Définition 1.4.5.

Avec les mêmes notations, la famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est appelée base *adaptée* à la décomposition $E = F \oplus G$. On l'obtient en concaténant les bases $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$.

Exemple 1.4.6.

Dans $\mathbb{R}^3$, considérons $\mathcal{D} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et $\mathcal{P}$ d'équation $x - y + 2z = 0$ et les vecteurs

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On montre aisément que $(\vec{u}_1)$ est une base de $\mathcal{D}$, que $(\vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une base de $\mathcal{P}$, et que $\mathbb{R}^3 = \mathcal{D} \oplus \mathcal{P}$.

Alors, $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^3 = \mathcal{D} \oplus \mathcal{P}$.

Proposition 1.4.7.

On suppose E de dimension finie. Soit f un endomorphisme de E , F un sous-espace vectoriel de E , et G un supplémentaire de F .

Enfin, soit $\mathcal{B}$ une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$. Alors la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme « par blocs »

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right),$$

(où A, B, C sont des matrices) si et seulement si F est stable par f .

Démonstration.

Supposons que F est stable par f . Si p est la dimension de F et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, alors $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de F et $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base de G . Mais F étant stable par f , alors $f(e_1), \dots, f(e_p)$ sont tous dans F ; autrement dit, $f(e_1), \dots, f(e_p) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$. Ceci explique que, dans les p premières colonnes de la matrice, les lignes $p+1$ à n sont nulles.

La réciproque se traite de la même manière. $\square$

Exercice 1.4.8.

Dans $E = \mathbb{R}^3$, on considère l'application

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y+z \\ x+z \\ z \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Écrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et en déduire un sous-espace stable par f .

Exercice 1.4.9.

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x - y - z = 0$ et la droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On considère aussi l'endomorphisme

$$u : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x & +y & \\ x & & -z \\ -2x & +y & +z \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer des bases de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{D}$, puis vérifier que $\mathcal{P} \oplus \mathcal{D} = \mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ sont stables par u , en procédant de deux manières différentes.

2 Familles de vecteurs et sous-espaces vectoriels

2.1 Familles dénombrables de vecteurs

On travaillera le plus souvent avec un nombre fini de vecteurs, on parle aussi de *famille finie* de vecteurs de E . Dans ce cas, on utilisera les définitions vues en TSI 1.

Rappel 2.1.1.

Pour une famille $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ de vecteurs de E :

- ▷ $\mathcal{V}$ est libre lorsque pour tout $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, si $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0_E$, alors $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$;
- ▷ $\mathcal{V}$ engendre E lorsque pour tout vecteur $v \in E$, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$;
- ▷ $\mathcal{V}$ est une base de E lorsque $\mathcal{V}$ à la fois libre est et engendre E , i.e. si pour tout vecteur $v \in E$, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ *uniques* tels que $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$.

Dans certains cas, vous serez aussi amenés à manipuler des suites de vecteurs (on parle alors de *famille infinie* de vecteurs).

Définition 2.1.2.

Soit $\mathcal{V} = (v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de E . On appelle *combinaison linéaire* de vecteurs de $\mathcal{V}$ tout vecteur de la forme

$$v = \lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n,$$

où n est un entier naturel quelconque et où $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.

Si $v = 0$, on parle de combinaison linéaire *nulle*. Si tous les scalaires λ_i sont nuls, on parle de combinaison linéaire *triviale*.

Exemple 2.1.3.

Dans $E = \mathbb{K}[X]$, si l'on considère la famille $\mathcal{V} = (1, X, X^2, \dots)$, alors une combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{V}$ est un polynôme.

On dit qu'un polynôme P est pair si $P(X) = P(-X)$. On montre que les polynômes pairs sont exactement les polynômes qui sont combinaison linéaire de la famille $(X^{2k})_{k \in \mathbb{N}} = (1, X^2, X^4, \dots)$.

Remarque 2.1.4.

Une combinaison linéaire est toujours une somme d'un nombre *fini* de vecteurs.

Remarque 2.1.5.

Toute combinaison linéaire triviale est nulle, mais la réciproque n'est pas vraie. Par exemple, dans $\mathbb{K}[X]$, si $v_1 = X$ et $v_2 = -X$, la combinaison linéaire $v_1 + v_2$ est nulle mais non triviale.

Exercice 2.1.6.

Le polynôme $P = X^2 + X$ est-il combinaison linéaire des polynômes $A = X - 1$, $B = X + 2$ et $C = X^2 - X$?

Définition 2.1.7.

Soit $\mathcal{V} = (v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de E . On appelle *sous-espace vectoriel engendré* par $\mathcal{V}$ l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de $\mathcal{V}$. On le note $\text{Vect}(\mathcal{V})$.

Proposition 2.1.8.

Si $\mathcal{V}$ est une suite de vecteurs de E , alors $\text{Vect}(\mathcal{V})$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $\mathcal{V}$. En d'autres termes :

- ▷ $\text{Vect}(\mathcal{V})$ est un sous-espace vectoriel de E ;
- ▷ si F est un sous-espace vectoriel de E contenant tous les vecteurs de $\mathcal{V}$, alors $\text{Vect}(\mathcal{V}) \subset F$.

Démonstration. ▷ Commençons par montrer que $\text{Vect}(\mathcal{V})$ est un sev de E . Le vecteur nul est une combinaison linéaire de $\mathcal{V}$ (prendre par exemple une combinaison linéaire triviale). De plus, si u et v sont deux combinaisons linéaires de $\mathcal{V}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors $\lambda u + \mu v$ est une combinaison linéaire de $\mathcal{V}$.

- ▷ Soit F un sev de E contenant tous les éléments de $\mathcal{V}$. Étant un sev, F est stable par combinaisons linéaires : toute combinaison linéaire d'éléments de F appartient à F . En particulier (puisque $\mathcal{V} \subset F$), toute combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{V}$ appartient à F ; autrement dit, $\text{Vect}(\mathcal{V}) \subset F$. □

Exercice 2.1.9.

Résoudre dans $\mathbb{R}_2[X]$ l'équation $XP'(X) - P(X) + P(0) = 0$. Écrire l'ensemble des solutions sous la forme d'un sous-espace vectoriel engendré.

Définition 2.1.10.

Une famille $\mathcal{V} = (v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ vecteurs de E . $\mathcal{V}$ est dite :

- ▷ *libre* lorsque la seule combinaison linéaire nulle de vecteurs de $\mathcal{V}$ est la combinaison triviale (*i.e.* tous ses coefficients sont nuls) ;
- ▷ *génératrice* lorsque tout élément de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{V}$, autrement dit si $\text{Vect}(\mathcal{V}) = E$.

Lorsque $\mathcal{V}$ est à la fois libre et génératrice, on dit que c'est une *base* de E .

Remarque 2.1.11.

$\mathcal{V}$ est une base de E si et seulement si tout vecteur de E peut s'écrire de manière unique comme combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{V}$.

Remarque 2.1.12.

La famille $(v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est libre si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(v_0, \dots, v_n)$ est libre.

Exemple 2.1.13.

Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, la famille $X^2, X + 1$ est libre, mais elle n'est pas génératrice. La famille $1, X, X^2, 1 + X + X^2$ est génératrice, mais pas libre.

Exemple 2.1.14.

La famille $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

Dans $\mathbb{R}[X]$, La famille $(nX)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est ni libre, ni génératrice.

Proposition 2.1.15.

On peut enlever des vecteurs d'une famille libre : on obtient toujours une famille libre.

On peut ajouter des vecteurs à une famille génératrice : on obtient toujours une famille génératrice.

Démonstration.

Il suffit d'écrire ce que cela signifie. □

Exemple 2.1.16.

Dans $\mathbb{R}[X]$, la famille $(X^{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ est libre. Elle n'est toutefois pas génératrice.

Remarque 2.1.17.

Si $\mathcal{V} = (v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et si $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une famille de scalaires nulle à partir d'un certain rang (*i.e.* il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\lambda_n = 0$), on se permettra d'utiliser la convention d'écriture :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \lambda_i v_i = \sum_{i=0}^{n_0-1} \lambda_i v_i.$$

Si $\mathcal{V}$ est une base de E , et si l'on écrit ainsi $x = \sum_{i=0}^{+\infty} \lambda_i v_i$, alors la suite $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est appelée *suite des coordonnées de x dans $\mathcal{V}$* .

Rappel 2.1.18.

On rappelle qu'un espace vectoriel est de dimension finie si et seulement s'il admet une base finie. Dans ce cas, sa dimension est le cardinal d'une de ses bases. Si E est de dimension finie égale à n , toute famille libre de E est de cardinal au plus n , et toute famille génératrice de E est de cardinal au moins n . On peut obtenir une base de E en complétant une famille libre de E , ou en extrayant des vecteurs d'une famille génératrice de E .

Définition 2.1.19.

Une famille de polynômes est de degrés échelonnés lorsque ces polynômes sont de degrés deux à deux distincts.

Proposition 2.1.20 (Vu en TSI 1, toujours vrai).
Toute famille de polynômes non nuls et de degrés échelonnés est libre.

Démonstration.

Cela a déjà été vu dans le cas d'une famille finie en TSI 1. Montrons-le dans le cas général.

Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de polynômes non nuls et de degrés échelonnés. Soit $0 = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n$ une combinaison linéaire nulle de cette famille ($\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$).

On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe un coefficient λ_k non nul, considérons parmi ceux-ci celui de plus haut degré. Sans perte de généralité, on peut supposer que c'est λ_n . On écrit alors

$$P_n = -\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k P_k.$$

Or, le polynôme de droite est de degré strictement plus petit que celui de P_n : en effet, par définition,

- ▷ soit $\lambda_k = 0$;
- ▷ soit $\deg(P_k) < \deg(P_n)$.

Par les règles de manipulations sur le degré, on obtient

$$\deg(P_n) = \deg \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k P_k < \deg(P_n),$$

ce qui est absurde. On a donc bien $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, cette famille est donc libre. $\square$

Corollaire 2.1.21 (Très utile).

Soit $(P_0, \dots, P_n)$ des polynômes vérifiant pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\deg(P_k) = k$.

Alors, $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Démonstration.

C'est une famille de polynômes non nuls et de degrés échelonnés : elle est donc libre.

De plus, c'est une famille de $n+1 = \dim(\mathbb{K}_n[X])$ vecteurs de $\mathbb{K}_n[X]$: c'est donc une base de $\mathbb{K}_n[X]$. $\square$

Corollaire 2.1.22.

Soit $(P_k)_{k \in \mathbb{N}} = (P_0, P_1, \dots)$ une suite de polynômes vérifiant $\forall k \in \mathbb{N}$, $\deg(P_k) = k$.

Alors, cette famille est une base de $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration.

C'est une famille de polynômes non nuls et de degrés échelonnés : elle est donc libre.

Il suffit de montrer qu'elle engendre $\mathbb{K}[X]$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, soit $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \geq \deg(P)$: on a donc $P \in \mathbb{K}_n[X]$.

Comme $(P_0, \dots, P_n)$ vérifie les hypothèses du corollaire 2.1.21, c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Il existe donc $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ vérifiant

$$P = \lambda_0 P_0 + \dots + \lambda_n P_n.$$

Ainsi, P est bien combinaison linéaire de la famille (infinie) $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

Ainsi, $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est bien une base de $\mathbb{K}[X]$. $\square$

Exemple 2.1.23.

La famille $(1, X, X^2, \dots)$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

Si $a \in \mathbb{K}$, la famille $(1, X - a, (X - a)^2, \dots)$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

2.2 Hyperplans et formes linéaires (HP)

Ce paragraphe, hors programme, ne sera pas traité en classe.

Dans tout ce paragraphe, E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 2.2.1.

Une forme linéaire sur E est une application linéaire définie sur E et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Exemple 2.2.2.

Sur $\mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto x + 2y - z$ est une forme linéaire.

Définition 2.2.3.

On appelle *hyperplan* de E tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$.

Exemple 2.2.4.

Une droite de $\mathbb{R}^2$, un plan de $\mathbb{R}^3$ sont des hyperplans. $\text{Vect}(X, X^2)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_2[X]$. Si E est une droite, l'unique hyperplan de E est $\{0\}$ (mais ce n'est pas très intéressant).

Exemple 2.2.5.

L'ensemble des matrices de trace nulle est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 2.2.6.

Un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan si et seulement si F admet une droite pour supplémentaire. En d'autres termes, s'il existe G un sous-espace vectoriel de E de dimension 1 tel que $E = H \oplus G$.

Démonstration.

Si H admet une droite G pour supplémentaire, alors d'après la formule de Grassmann, $\dim E = \dim F + \dim G$, donc $\dim F = \dim E - 1$ et F est donc un hyperplan.

Réciproquement, si H est un hyperplan. L'espace E étant de dimension finie, F admet nécessairement un supplémentaire G . D'après la formule de Grassmann, $\dim E = \dim H + \dim G$ donc $\dim G = \dim E - \dim H = \dim E - (\dim E - 1) = 1$; l'espace G est bien une droite. $\square$

Proposition 2.2.7.

Soit H un sous-espace vectoriel de E . Alors H est un hyperplan si et seulement s'il existe une forme linéaire $\varphi: E \rightarrow \mathbb{K}$ non nulle telle que $\text{Ker } \varphi = H$, i.e. telle que

$$H = \{v \in E \mid \varphi(v) = 0\}.$$

L'équation $\varphi(v) = 0$ est appelée (une) équation de l'hyperplan H .

Remarque 2.2.8.

On pense évidemment à l'équation cartésienne d'une droite du plan, ou d'un plan de l'espace. Attention : ce ne sont des sous-espaces vectoriels que s'ils contiennent l'origine !

Démonstration.

Si φ est une forme linéaire non nulle, $\text{Im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel non nul de $\mathbb{K}$, donc de dimension 1. D'après le théorème du rang, on a donc $\dim \text{Ker } \varphi = \dim(E) - 1$, donc $\text{Ker } \varphi$ est un hyperplan de E .

Réciproquement, soit H un hyperplan de E . D'après la proposition 2.2.7, H admet pour supplémentaire une droite G . Soit e un vecteur non nul de G , la famille (e) est alors une base de G . Autrement dit, pour tout $v \in G$, il existe un unique $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $v = \lambda e$, et l'application coordonnée $\psi: v \mapsto \lambda$ est une application linéaire de G dans $\mathbb{K}$. Posons alors p la projection sur G parallèlement à H (voir partie suivante) : l'application $\varphi = \psi \circ p$ répond à la question. $\square$

Exercice 2.2.9.

Dans $E = \mathbb{R}^3$, vérifier que $H = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est un hyperplan et en donner une équation.

3 Compléments sur les applications linéaires

Dans toute cette partie, F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires : $E = F \oplus G$.

Rappel 3.0.1.

Tout endomorphisme de E est caractérisé par ses restrictions sur F et G , c'est-à-dire que pour $u: E \rightarrow E$:

- ▷ si l'on connaît $u(f)$ pour tout $f \in F$;
- ▷ si l'on connaît $u(g)$ pour tout $g \in G$;

alors il y a une seule manière de déterminer u de sorte que u soit linéaire : si $f \in F$ et $g \in G$,

$$u(f + g) = u(f) + u(g).$$

3.1 Projecteurs

Définition 3.1.1 (voir figure 1).

Soit $x \in E$. Il existe $f \in F$ et $g \in G$ uniques tels que $x = f + g$. Le vecteur f est appelé *projeté* de x sur F et parallèlement à G (parfois noté $p_{F//G}(x)$).

L'application $p_{F//G}$ est appelée *projection sur F et parallèlement à G* . On dit aussi que $p_{F//G}$ est un *projecteur*.

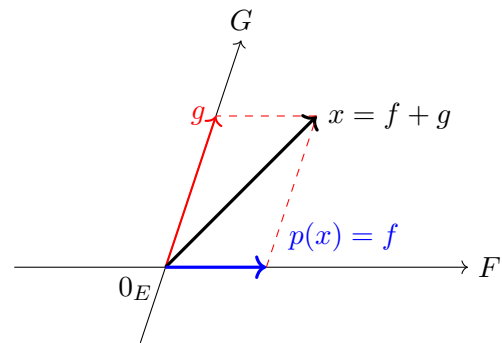


FIGURE 1 – Projection sur F , parallèlement à G .

Remarque 3.1.2.

Lorsque l'on détermine en pratique la décomposition d'un vecteur x sous la forme $x = f + g$, on détermine en fait l'expression des deux projections associées : celles sur F parallèlement à G , et celle sur G parallèlement à F .

Exercice 3.1.3.

On se place dans $\mathbb{R}^2$. On considère les droites $\mathcal{D}$ d'équation $x + y = 0$ et $\mathcal{D}'$ d'équation $x + 2y = 0$.

Montrer que $\mathbb{R}^2 = \mathcal{D} \oplus \mathcal{D}'$, et exhiber les projecteurs associés.

Exercice 3.1.4.

On se place dans $\mathbb{R}^3$. On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x = 0$ et la droite $\mathcal{D}$ engendrée par le vecteur

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathcal{P} \oplus \mathcal{D}$, et exhiber les projecteurs associés.

Proposition 3.1.5 (propriétés fondamentales).

Notons p la projection sur F parallèlement à G . Alors, p est un endomorphisme de E , et

- ▷ $G = \text{Ker}(p)$,
- ▷ $F = \text{Im}(p) = \text{Ker}(\text{Id}_E - p)$,
- ▷ $p \circ p = p$.

Démonstration.

Par construction, on a bien $p : E \rightarrow E$. Soit $x, x' \in E$, que l'on écrit $x = f + g$ et $x' = f' + g'$, où $f, f' \in F$ et $g, g' \in G$. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors,

$$\lambda x + \mu x' = \underbrace{\lambda f + \mu f'}_{\in F} + \underbrace{\lambda g + \mu g'}_{\in G}.$$

Ainsi, par définition,

$$p(\lambda x + \mu x') = \lambda f + \mu f' = \lambda p(x) + \mu p(x').$$

Ainsi, p est bien un endomorphisme de E .

Soit $x \in E$, que l'on décompose en $x = f + g$, où $f \in F$ et $g \in G$. Alors $p(x) = f$.

Ainsi,

$$p(x) = 0_E \Leftrightarrow f = 0_E \Leftrightarrow x = g \Leftrightarrow x \in G.$$

On obtient donc bien $\text{Ker}(p) = G$.

De plus, $p(x) = f \in F$, et $p(f) = p(f + 0_E) = f$, donc $F = \text{Im}(p)$.

De même, vu que $p(x) = f$, on a $p(x) = x$ si et seulement si $x = f$, et donc si et seulement si $g = 0_E$, donc si et seulement si $x \in F$.

Enfin, $p(p(x)) = p(f) = p(f + 0_E) = f = p(x)$, donc $p \circ p = p$. $\square$

Remarque 3.1.6 (éléments caractéristiques).

Dans ce cas, F et G sont les deux éléments qui caractérisent p . On retient que l'on projette toujours sur l'image et parallèlement au noyau de la projection.

$\text{Ker}(\text{Id}_E - p)$ (qui est aussi $\text{Ker}(p - \text{Id}_E)$) est l'ensemble des solutions de l'équation $p(\vec{u}) = \vec{u}$.

$\text{Ker}(p)$ est l'ensemble des solutions de l'équation $p(\vec{u}) = \vec{0}$.

Remarque 3.1.7.

On peut définir cette projection de manière plus abstraite : $p_{F//G}$ est l'unique endomorphisme p de E vérifiant :

- ▷ pour tout $f \in F$: $p(f) = f$;
- ▷ pour tout $g \in G$: $p(g) = 0_E$.

Ainsi, si $f \in F$ et $g \in G$, $p(f + g) = p(f) + p(g) = f$.

Théorème 3.1.8.

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $p \circ p = p$. Alors,

$$E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p),$$

et p est la projection sur $\text{Im}(p) = \text{Ker}(\text{Id}_E - p)$ et parallèlement à $\text{Ker}(p)$.

Démonstration.

On montre que $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$ sont en somme directe, même si ce n'est pas utile pour la suite. Soit $x \in \text{Ker } p \cap \text{Im } p$. Alors il existe y tel que $x = p(y)$. Or $p(x) = 0_E$ mais $p(x) = p(p(y)) = p(y) = x$, donc $x = 0_E$. $\text{Ker } p$ et $\text{Im } p$ sont donc en somme directe.

Montrons que $E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p$ par analyse-synthèse. Considérons $x \in E$.

Analyse : soit $y \in \text{Im } p$ et $k \in \text{Ker } p$ tels que $x = y + k$. Alors il existe u tel que $y = p(u)$. Donc

$$p(x) = p(p(u)) + p(k) = p(p(u)) = p(u) = y.$$

Ainsi, on a $y = p(x)$ et donc $k = x - p(x)$.

Synthèse : on pose $y = p(x)$ et $k = x - p(x)$. Alors on a bien $x = y + k$. De plus, $p(y) = p(p(x)) = p(x) = y$, donc $y \in \text{Im } p$, et

$$p(k) = p(x - p(x)) = p(x) - p(p(x)) = p(x) - p(x) = 0_E,$$

et ainsi $k \in \text{Ker } p$. On a bien le résultat voulu.

Mais si l'on note $x = y + k$ la décomposition associée à $\text{Ker } p \oplus \text{Im } p = E$, alors on vient de montrer que $p(x) = y$, donc p est bien la projection sur $\text{Im } p$ parallèlement à $\text{Ker } p$. $\square$

Exercice 3.1.9.

Dans $E = \mathbb{R}_4[X]$, on considère $B = X^3$, ainsi que l'application r , qui à un polynôme A associe le reste de la division euclidienne de A par B .

Que peut-on dire de r ? Déterminer une base dans laquelle sa matrice est particulièrement simple.

Reprendre l'exercice dans $\mathbb{R}_n[X]$ pour $n \geq 4$.

Remarque 3.1.10.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n , $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ représentant dans une base $\mathcal{B}$ un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P = X^2 - 1$.

On vient de démontrer que f est un projecteur si et seulement si $P(A) = 0$, i.e. si et seulement si P est un polynôme annulateur de A .

Exemple 3.1.11.

Notons n la dimension de E , r celle de F ($r = \text{rg}(p)$), soit $\mathcal{B}$ une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$.

Si p est la projection sur F parallèlement à G ,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.2 Symétries

Définition 3.2.1 (voir figure 2).

Soit $x \in E$, il existe $f \in F$ et $g \in G$ uniques tels que $x = f + g$. Le vecteur $f - g$ est le *symétrique* de x par rapport à F et parallèlement à G est (parfois noté $s_{F//G}(x)$).

L'application $s_{F//G}$ est appelée *symétrie par rapport à F et parallèlement à G* . On dit que $s_{F//G}$ est une *symétrie*.

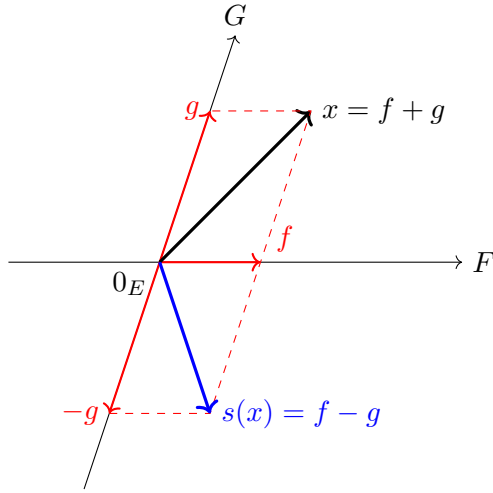


FIGURE 2 – Symétrie par rapport à F , parallèlement à G .

Remarque 3.2.2.

Si l'on note p la projection sur F et parallèlement à G , p' la projection sur G parallèlement à F et s la symétrie par rapport à F et parallèlement à G , alors

$$s = p - p' = \text{Id}_E - 2p' = 2p - \text{Id}_E.$$

En résumé : si l'on connaît l'une ou l'autre des projections (ou les deux !), on connaît les deux symétries.

Exercice 3.2.3.

Reprendre l'exercice 3.1.3, et déterminer les symétries associées à cette décomposition.

Exercice 3.2.4.

Reprendre l'exercice 3.1.4, et déterminer les symétries associées à cette décomposition.

Exercice 3.2.5.

Dans $\mathbb{R}^2$, déterminer l'expression de la symétrie par rapport à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ et parallèlement à la droite $\mathcal{D}'$ d'équation $y = -x$.

Proposition 3.2.6 (propriétés fondamentales).

Notons s la symétrie par rapport à F et parallèlement à G . Alors, s est un endomorphisme de E , et

- ▷ $F = \text{Ker}(s - \text{Id}_E)$,
- ▷ $G = \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$,
- ▷ $s \circ s = \text{Id}_E$.

Démonstration.

On peut écrire $s = p_{F//G} - p_{G//F}$, donc s est un endomorphisme de E comme différence d'endomorphismes de E .

Soit $x \in E$, que l'on décompose en $x = f + g$, où $f \in F$ et $g \in G$. Alors $s(x) = f - g$.

Ainsi,

$$s(x) = x \Leftrightarrow f + g = f - g \Leftrightarrow g = -g \Leftrightarrow g = 0_E \Leftrightarrow x \in F.$$

On obtient donc bien $\text{Ker}(s - \text{Id}_E) = F$.

De même,

$$s(x) = -x \Leftrightarrow f + g = -f + g \Leftrightarrow f = -f \Leftrightarrow f = 0_E \Leftrightarrow x \in G.$$

On obtient donc bien $\text{Ker}(s + \text{Id}_E) = F$.

Enfin, $s(s(x)) = s(f - g) = f - (-g) = f + g = x$, donc $s \circ s = \text{Id}_E$. $\square$

Remarque 3.2.7 (éléments caractéristiques).

Dans ce cas, F et G sont les deux éléments qui caractérisent s . On retient que l'on réalise une symétrie par rapport à l'ensemble des points fixes (ou invariants) de la symétrie : c'est ce que vous avez appelé « l'axe de symétrie » au collège.

$\text{Ker}(\text{Id}_E - s)$ (qui est aussi $\text{Ker}(s - \text{Id}_E)$) est l'ensemble des solutions de l'équation $s(\vec{u}) = \vec{u}$.

$\text{Ker}(s + \text{Id}_E)$ est l'ensemble des solutions de l'équation $s(\vec{u}) = -\vec{u}$.

Remarque 3.2.8.

On peut définir cette symétrie de manière plus abstraite : $s_{F//G}$ est l'unique endomorphisme s de E vérifiant :

- ▷ pour tout $f \in F$: $s(f) = f$;
- ▷ pour tout $g \in G$: $s(g) = -g$.

Ainsi, si $f \in F$ et $g \in G$, $s(f + g) = s(f) + s(g) = f - g$.

Théorème 3.2.9.

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $s \circ s = \text{Id}_E$. Alors,

$$E = \text{Ker}(s - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{Id}_E),$$

et s est la symétrie par rapport à $\text{Ker}(s - \text{Id}_E)$ et parallèlement à $\text{Ker}(s + \text{Id}_E)$.

Démonstration.

On raisonne par analyse-synthèse, comme pour les projecteurs.

Analyse : Soit $x \in E$, que l'on écrit

$$x = y + z,$$

avec $y, z \in E$ vérifiant $s(y) = y$ et $s(z) = -z$. On a alors, par linéarité de s :

$$s(x) = s(y) + s(z) = y - z.$$

On effectue la demi-somme de ces deux lignes, pour obtenir

$$y = \frac{1}{2}(x + s(x))$$

et

$$z = \frac{1}{2}(x - s(x)).$$

Synthèse : Soit $x \in E$, on pose $y = \frac{1}{2}(x + s(x))$ et $z = \frac{1}{2}(x - s(x))$, et l'on vérifie que $x = y + z$, que $s(y) = y$ et que $s(z) = -z$.

On a donc bien $E = \text{Ker}(s - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$, et l'on observe que

$$s(x) = \frac{1}{2}(x + s(x)) - \frac{1}{2}(x - s(x)),$$

ce qui montre que s est bien la symétrie voulue. $\square$

Exercice 3.2.10.

Dans $E = \mathbb{R}_4[X]$, on considère

$$\varphi : P \mapsto P(-X).$$

Que peut-on dire de φ ? Déterminer une base dans laquelle sa matrice est particulièrement simple.

Reprendre l'exercice dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Remarque 3.2.11.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n , $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ représentant dans une base $\mathcal{B}$ un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P = X^2 - X$.

On vient de démontrer que f est un projecteur si et seulement si $P(A) = 0$, *i.e.* si et seulement si P est un polynôme annulateur de A .

Exemple 3.2.12.

Notons n la dimension de E , k celle de F , soit $\mathcal{B}$ une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$.

Si s est la symétrie par rapport à F et parallèlement à G , alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-k} \end{array} \right).$$

3.3 Exercices classiques.

Exercice 3.3.1.

Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ suivant.

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -3x & +2y & -4z \\ 2x & & +2z \\ 4x & -2y & +5z \end{pmatrix}$$

Exercice 3.3.2.

Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ suivant.

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x & -4y & -2z \\ 4x & +9y & +4z \\ -8x & -16y & -7z \end{pmatrix}$$