

LE CANTIQUE DES CLASSIQUES

MATHÉMATIQUES

TSI 2, lycée Gustave Eiffel, Dijon

Année scolaire 2026/2027

Ce recueil d'exercices est principalement destiné aux étudiants de TSI préparant le concours Centrale-Supélec, notamment aux 5/2. Il vous permettra de couvrir un grand nombre de sujets classiques, qui reviennent régulièrement, tant à l'écrit qu'à l'oral.

Vous pouvez me rendre tout problème issu de ce recueil, et ce à tout moment de l'année : je corrigerai votre copie et vous donnerai un corrigé du sujet traité.

I Classiques d'analyse

I-A Intégrales de Wallis et formule de Stirling

Chapitres de spé nécessaires : séries numériques.

Compétences travaillées : calcul asymptotique, intégration par parties, raisonnement par récurrence.

Partie I : les intégrales de Wallis

On définit pour tout entier naturel n l'intégrale de Wallis d'ordre n par :

$$w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt.$$

- 1) Calculer w_0 et w_1 .
- 2) Soit $n \in \mathbb{N}$. En procédant par intégration par parties, démontrer que

$$w_{n+2} = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) \cos^2(t) dt.$$

- 3) En déduire que $(n+2)w_{n+2} = (n+1)w_n$.
- 4) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}.$$

- 5) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < w_{n+2} \leq w_{n+1} \leq w_n$.
- 6) En utilisant la relation obtenue à la question 3), démontrer que

$$w_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} w_n.$$

- 7) Démontrer que la suite de terme général $(n+1)w_{n+1}w_n$ est constante. Que vaut cette constante ?
- 8) Donner un équivalent simple de w_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.
- 9) Déduire des questions précédentes que

$$\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \sqrt{n\pi} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Partie II : la formule de Stirling

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{e}{n}\right)^n n!$$

- 10) Donner une expression simplifiée de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, en fonction de e et de $1 + \frac{1}{n}$.

- 11) À l'aide d'un développement asymptotique, donner un équivalent de $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
- 12) En déduire la nature de la série $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$, puis celle de la suite de terme général $\ln(u_n)$.
- 13) Démontrer qu'il existe un réel $K > 0$ tel que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} K$.
- 14) En utilisant la question précédente et l'équivalent obtenu à la question 9), démontrer la formule de Stirling :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

I-B Les polynômes de Tchebychev

Chapitres de spé nécessaires : diagonalisation (suites récurrentes linéaires), intégrales généralisées, espaces euclidiens.

Compétences travaillées : récurrences simples et doubles, manipulation des fonctions trigonométriques, raisonnements sur les polynômes, récurrences linéaires doubles, convergence d'intégrales généralisées, produit scalaire, dérivation de fonctions composées.

Partie I : Construction des polynômes de Tchebychev

On définit la suite de polynômes $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant, $T_0(X) = 1$, $T_1(X) = X$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X).$$

- 1) Calculer $T_2(X)$ et $T_3(X)$.
- 2) Exprimer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(2x)$ et $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$.
- 3) En raisonnant par récurrence double, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$T_n(\cos(x)) = \cos(nx).$$

- 4) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est l'unique polynôme vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$.
- 5) En raisonnant par récurrence double, déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ le degré de T_n .
- 6) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n a pour coefficient dominant 2^{n-1} .
- 7) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n a la même parité que n .
- 8) En exploitant la relation obtenue à la question 3), déterminer pour $n \geq 1$ les racines de T_n (on les exprimera à l'aide de la fonction cosinus) et proposer une expression factorisée de T_n .
- 9) En appliquant le théorème de Rolle, démontrer que, pour tout $n \geq 2$, T'_n est scindé et à racines simples.
- 10) En dérivant la relation obtenue à la question 3), déterminer les racines de T'_n pour $n \geq 2$, et donner une expression factorisée de T'_n .

11) Déterminer en fonction de $x \in \mathbb{R}$ les racines (complexes) de l'équation du second degré

$$r^2 = 2xr - 1. \quad (\text{EC})$$

On discutera les trois cas : $|x| > 1$, $|x| = 1$ et $|x| < 1$.

12) Lorsque $|x| < 1$, démontrer que si l'on pose $\theta = \text{Arccos}(x)$, alors $e^{i\theta}$ est une solution de l'équation (EC).

13) Déterminer en fonction de $x \in \mathbb{R}$ une expression explicite de $T_n(x)$, en distinguant les trois cas : $|x| > 1$, $|x| = 1$ et $|x| < 1$.

Partie II : Un produit scalaire

14) Montrer que l'intégrale $\int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ converge.

15) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_{-1}^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}} dt$ converge.

16) Montrer que $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

17) Montrer que $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$ pour ce produit scalaire.

Indication : on pourra poser le changement de variable $t = \cos(x)$ et retrouver la formule de trigonométrie permettant de développer $\cos(px)\cos(qx)$.

18) Calculer $\|T_n\|$ pour chaque $n \geq 0$.

19) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire et de degré $n \geq 1$. Calculer la distance entre P et $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

II Classiques d'algèbre linéaire

II-A Les matrices nilpotentes et leurs exponentielles

Chapitres de spé nécessaires : déterminants, réduction, diagonalisation et trigonalisation, isométries vectorielles (une question).

Compétences travaillées : manipulations formelles en algèbre linéaire, calcul littéral matriciel, formule du binôme de Newton, manipulations de sommes.

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite *nilpotente* s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $A^p = 0$.

I - Étude spectrale d'une matrice nilpotente

1) Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente peut-elle être inversible ?

2) On considère, dans cette question uniquement, une matrice N à coefficients complexes qui vérifie les deux propriétés suivantes :

▷ N est triangulaire supérieure ;

▷ les coefficients diagonaux de N sont tous nuls.

Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à N , et $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

Pour $1 \leq k \leq n$, on note $F_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.

- a) Justifier que $F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_n$. Que vaut F_n ?
- b) Démontrer que pour tout $2 \leq k \leq n$, $f(e_k) \in F_{k-1}$. Que vaut $f(e_1)$?
- c) Justifier que pour tout $2 \leq k \leq n$, $f(F_k) \subset F_{k-1}$.
- d) Justifier que $f(F_1) = \{\vec{0}\}$.
- e) Démontrer que, pour tout $1 \leq k \leq n$, $f^k(e_k) = \vec{0}$, où $f^k = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{k \text{ fois}}$.
- f) Que peut-on dire de f^n ?
- g) Dédurre des questions précédentes que $N^n = 0$.
- 3) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente.
 - a) Déterminer son spectre.
 - b) Déterminer le polynôme caractéristique de A .
 - c) Justifier qu'il existe une matrice triangulaire supérieure N à coefficients complexes et une matrice inversible P à coefficients complexes telles que
 - ▷ tous les coefficients diagonaux de N soient nuls ;
 - ▷ $A = PNP^{-1}$.
 - d) Démontrer que $A^n = 0$.
- 4) Réciproquement, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\chi_A(X) = X^n$.
 - a) Justifier que A est trigonalisable.
 - b) En trigonalisant A , démontrer que A est nilpotente.

II - Exponentielle d'une matrice nilpotente

Pour une matrice nilpotente $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit son exponentielle comme

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} A^k.$$

- 5) Calculer $\exp(0_n)$, où 0_n est la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- 6) Démontrer que, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente, alors pour tout $p \geq n$,

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} A^k.$$

On se permettra donc d'écrire, pour une telle matrice A :

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

Dans toute la suite du problème, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice nilpotente.

- 7) Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente et telle que : $AB = BA$.
 - a) En développant le produit $(A + B)^{2n-1}$, démontrer que $A + B$ est nilpotente.
 - b) Démontrer que $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B)$.
- 8) En utilisant le résultat précédent pour une matrice B bien choisie, démontrer que $\exp(A)$ est inversible, et déterminer son inverse.
- 9) Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible. Démontrer que $\exp(P^{-1}AP) = P^{-1} \exp(A)P$.
- 10) En utilisant les résultats de la partie précédente, calculer $\det(\exp(A))$.

II-B Déterminant de Vandermonde et polynômes de Lagrange

Chapitres de spé nécessaires : déterminants.

Compétences travaillées : manipulations de déterminants, travail sur les racines d'un polynôme, récurrences, raisonnements abstraits en algèbre linéaire.

Partie I – Déterminant de Vandermonde

Pour tout $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, on définit le déterminant de Vandermonde de la famille $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ comme le déterminant $(n+1) \times (n+1)$:

$$V(\lambda_0, \dots, \lambda_n) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_0 & \lambda_0^2 & \dots & \lambda_0^n \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^n \end{vmatrix}.$$

L'objectif de cette partie est de proposer deux méthodes de calcul de ce déterminant.

Partie I.A – Calcul polynomial

On considère $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ fixés et deux à deux distincts, et l'on pose

$$P(x) = V(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}, x).$$

- 1) En raisonnant par développement par rapport à une ligne bien choisie, justifier que P est une fonction polynomiale de degré au plus n . Justifier que le coefficient dominant de P vaut $V(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1})$.
- 2) Que valent $P(\lambda_0), P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_{n-1})$? En déduire qu'il existe une constante $C \in \mathbb{C}$ vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{C}$,

$$P(x) = C(x - \lambda_0) \dots (x - \lambda_{n-1}).$$

- 3) Justifier que $C = V(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1})$.
- 4) En raisonnant par récurrence, démontrer que

$$V(\lambda_0, \dots, \lambda_n) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i).$$

Cette formule est-elle encore valable si les λ_i ne sont pas deux à deux distincts?

Partie I.B – Calcul par opérations sur les colonnes

- 5) Effectuer, dans cet ordre, les opérations $C_n \leftarrow C_n - \lambda_0 C_{n-1}$, $C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - \lambda_0 C_{n-2}$, et ce jusqu'à $C_1 \leftarrow C_1 - \lambda_0 C_0$ (où l'on numérote les colonnes de 0 à n), sur le déterminant $V(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$.
- 6) En déduire que

$$V(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = (\lambda_n - \lambda_0) \dots (\lambda_1 - \lambda_0) V(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

7) Retrouver par récurrence la formule de $V(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ obtenue à la question 4).

Partie II – Polynômes de Lagrange

Les trois premières sous-parties de cette partie s'intéressent, de manière indépendante, à la construction d'une famille $(L_0, \dots, L_n)$ de polynômes bien particulière : les polynômes de Lagrange.

Partie II.A – Existence par les matrices de Vandermonde

Pour tout $(n+1)$ -uplet $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$, on définit la matrice de Vandermonde comme

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_0 & \lambda_0^2 & \dots & \lambda_0^n \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C}).$$

Ainsi, $\det(M_\lambda) = V(\lambda)$. On rappelle que la base canonique de $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{C})$ est formée des matrices élémentaires $(E_0, \dots, E_n)$, où

$$E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

le 1 se situant en i^{e} position.

8) Justifier que, pour tout $(n+1)$ -uplet $\lambda \in \mathbb{C}^{n+1}$, M_λ est inversible si et seulement si les scalaires λ_i sont distincts deux à deux.

On considère maintenant un $(n+1)$ -uplet $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ de scalaires deux à deux distincts.

9) Soit un polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$, que l'on écrit $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$. Calculer le produit

$$M_\lambda \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

10) En déduire que, pour tout $0 \leq i \leq n$, il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{C}_n[X]$ vérifiant, pour tout $0 \leq j \leq n$,

$$L_i(\lambda_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i, \\ 0 & \text{si } j \neq i. \end{cases}$$

Partie II.B – Existence par bijectivité

On n'utilisera pas dans cette partie le résultat obtenu dans la partie précédente.

On considère un $(n + 1)$ -uplet $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ de scalaires deux à deux distincts ainsi que l'application

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{C}_n[X] &\rightarrow \mathbb{C}^{n+1} \\ P &\mapsto (P(\lambda_0), \dots, P(\lambda_n)) \end{aligned} .$$

- 11) Démontrer que Φ est une application linéaire.
- 12) Démontrer que $\text{Ker}(\Phi) = \{0\}$.
- 13) En déduire que Φ est un isomorphisme.
- 14) En déduire que, pour tout $0 \leq i \leq n$, il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{C}_n[X]$ vérifiant, pour tout $0 \leq j \leq n$,

$$L_i(\lambda_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i, \\ 0 & \text{si } j \neq i. \end{cases}$$

Partie II.C – Construction explicite

On n'utilisera pas dans cette partie le résultat obtenu dans les deux parties précédentes.

On considère un $(n + 1)$ -uplet $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ de scalaires deux à deux distincts et l'on pose, pour tout $0 \leq i \leq n$,

$$L_i(X) = \prod_{0 \leq j \neq i \leq n} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}.$$

- 15) Justifier que $L_0, \dots, L_n \in \mathbb{C}_n[X]$.
- 16) Vérifier que, pour tout $0 \leq j \leq n$,

$$L_i(\lambda_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i, \\ 0 & \text{si } j \neq i. \end{cases}$$

- 17) En procédant à des évaluations en des scalaires bien choisis, démontrer que la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est une famille libre, puis que c'est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.
- 18) Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Démontrer que

$$P(X) = \sum_{i=0}^n P(\lambda_i) L_i(X).$$

- 19) En déduire que, pour chaque $0 \leq i \leq n$, le polynôme L_i est le seul polynôme de $\mathbb{C}_n[X]$ vérifiant, pour tout $0 \leq j \leq n$,

$$L_i(\lambda_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i, \\ 0 & \text{si } j \neq i. \end{cases}$$

Remarque culturelle. Par ce qui précède, on voit donc que pour tout $(y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$ solution du *problème d'interpolation de Lagrange* :

$$P(\lambda_0) = y_0, \dots, P(\lambda_n) = y_n.$$

On a même une expression explicite de P :

$$P(X) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(X).$$

Pour $n = 1$, on retrouve le problème de l'obtention de l'équation d'une droite passant par deux points donnés, longuement étudié au collège.

III Classiques de probabilités

III-A Développement asymptotique de la série harmonique et problème du collectionneur

Chapitres de spé nécessaires : séries numériques, intégrales généralisées, variables aléatoires finies, probabilités sur un univers dénombrable.

Compétences travaillées : études de fonctions, calcul asymptotique, comparaison série-intégrale, calculs d'espérance et de variance, loi géométrique et loi de Bernoulli.

I - Développement asymptotique de la série harmonique

Pour tout $n \geq 1$, on définit

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad u_n = H_n - \ln(n) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

- 1) Donner un équivalent de $u_{n+1} - u_n$, lorsque $n \rightarrow +\infty$.
- 2) En déduire que la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge.
- 3) En déduire qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ vérifiant $u_n = \gamma + o(1)$.
- 4) En déduire un développement asymptotique à deux termes H_n .
- 5) Démontrer que pour tout $t \geq 0$:

$$-\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} \leq t - \ln(1+t) \leq \frac{t^2}{2}.$$

- 6) Démontrer que $\sum v_n$ est convergente et que pour tout $N \geq 1$:

$$\int_{N+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2t^2} - \frac{1}{3t^3} \right) dt \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} v_n \leq \int_N^{+\infty} \frac{dt}{2t^2}.$$

- 7) En déduire que, lorsque $N \rightarrow +\infty$, $\sum_{n=N+1}^{+\infty} v_n = \frac{1}{2N} + o\left(\frac{1}{N}\right)$.

- 8) En considérant $w_n = u_n - \gamma$ et $w_{n+1} - w_n$, en déduire un développement à trois termes de H_n .

II - Le problème du collectionneur

On considère une urne contenant n boules, numérotée de 1 à n . On réalise une succession de tirages avec remise dans cette urne. On pourra noter $(X_p)_{p \geq 1}$ la suite des numéros tirés.

II.A - Le point du vue du collectionneur

Pour chaque $1 \leq k \leq n$, on note T_k le nombre de tirages nécessaires pour obtenir k numéros de boules distincts. Par exemple, si l'on tire les numéros

$$5, 5, 1, 3, 1, 1, 5, 1, 4 \dots$$

on a $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 4$ et $T_5 = 9$. On pourra convenir que $T_0 = 0$.

- 9) Que vaut T_1 ? Que représente T_n ?
- 10) Soit $2 \leq k \leq n$, justifier que $T_k - T_{k-1}$ suit la loi géométrique de paramètre $\frac{n - (k - 1)}{n}$.
- 11) En déduire que $E(T_n) = nH_n$. En déduire un développement asymptotique de $E(T_n)$ à trois termes.
- 12) Expliquer qualitativement pourquoi les variables aléatoires $T_k - T_{k-1}$ sont indépendantes. On admettra ce résultat dans la suite du problème.
- 13) Exprimer $V(T_n)$ en fonction de H_n et de $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\pi^2}{6}$.
- 14) On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Donner un équivalent asymptotique de $V(T_n)$.
- 15) Soit $\varepsilon > 0$. Justifier que

$$P\left(\left|\frac{T_n}{n} - H_n\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\pi^2}{6\varepsilon^2}$$

II.B - Le point du vue des boules

Soit $p \geq 1$. Pour chaque $1 \leq k \leq n$ et chaque $1 \leq i \leq p$, on note $B_{i,p}$ la variable aléatoire valant 1 si la boule $n^\circ i$ a été tirée lors des p premiers tirages, et 0 sinon. Par exemple, si $n = 6$ et si l'on tire les numéros

$$5, 5, 1, 3, 1, 1, 5, 1, 4 \dots$$

alors

$$B_{1,9} = B_{3,9} = B_{4,9} = B_{5,9} = 1 \quad \text{et} \quad B_{2,9} = B_{6,9} = 0.$$

- 16) Calculer $P(B_{i,p} = 0)$.
- 17) En déduire la loi et l'espérance de $B_{i,p}$.
- 18) Que représente $B_{1,p} + \dots + B_{n,p}$?
- 19) Calculer l'espérance du nombre N_p de numéros distincts tirés dans les p premiers tirages.

20) Déterminer la limite de $\frac{E(N_n)}{n}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Remarque culturelle : on peut, de la même manière que précédemment, calculer $V(N_p)$. On peut notamment montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P\left(\left|\frac{N_n}{n} - \left(1 - \frac{1}{e}\right)\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi, lorsque l'on tire autant de boules qu'il n'y a dans l'urne, la proportion de boules différentes tirées tendra (en un sens probabiliste) vers $1 - \frac{1}{e}$.