

CAHIER DE VACANCES

MATHÉMATIQUES

TSI(2 - ε), ÉTÉ 2026

Ce cahier a été conçu afin de vous permettre d'effectuer quelques révisions avant votre rentrée en TSI2.

Au début du document, vous trouverez des exercices d'entraînement techniques. Ensuite, chaque page aborde une notion, en proposant quelques points de révision, puis quelques petits exercices ou un petit problème. En fin de document, vous trouverez un formulaire, qui sera supposé être connu sur le bout des doigts à la rentrée !

Vous trouverez aussi des indications pour les exercices, et quelques résultats pour les exercices calculatoires. N'hésitez pas à utiliser Python (ou, au pire, votre calculatrice) pour vérifier vos résultats calculatoires. Toutefois, ne menez pas directement vos calculs avec : commencez-les toujours à la main.

Si vous avez des questions, ou avez besoin d'aide ou d'indications, n'hésitez pas à me les poser à l'adresse suivante.

`matthieu.solnon@ac-dijon.fr`

Échauffement

Exercice 1 Résoudre les équations trigonométriques suivantes, dans les ensembles prescrits. On donnera la solution sous la forme d'un ensemble.

1) $\cos(x) = \frac{1}{2}, x \in [0, 2\pi]$

4) $\cos(x) = 1, x \in] - 6\pi, 4\pi]$

2) $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, x \in [-\pi, \pi]$

5) $\sin(x) = 0, x \in [-3\pi, \pi[$

3) $\tan(x) = 1, x \in [0, 4\pi]$

6) $\tan(x) = -\frac{1}{\sqrt{3}}, x \in [0, 3\pi]$

Exercice 2 Factoriser les expressions polynomiales suivantes, sans écrire ni calculer de discriminant.

1) $x^2 - 5x + 4$

3) $x^3 - 5x^2 + 6x$

2) $3x^2 + 2x - 1$

4) $x^3 - x^2 - x + 1$

Exercice 3 Dériver les expressions suivantes.

1) $\frac{x^2 + 1}{\ln(x)}$

4) $\tan \frac{b+1}{b-1}$

2) $\sin(t) \cos^3(t)$

5) u^u

3) $(1 + a^2)^5$

6) $v^4 \ln(v)$

Exercice 4 Déterminer une primitive de chacune des expressions suivantes, en repérant les formules de dérivation d'une composée.

1) $\cos(x) \sin^4(x)$

3) $\frac{\cos(u)}{\sin(u)}$

2) $\frac{e^t}{1 + e^{2t}}$

4) $\frac{v}{\sqrt{1 + v^2}}$

Exercice 5 Déterminer (en le justifiant) un équivalent de chacune des expressions suivantes dans les deux cas : $x \rightarrow 0$ et $x \rightarrow +\infty$.

1) $x^3 - 2x^2 + x$

3) $\frac{e^x + \sqrt{x}}{2^x - x}$

5) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

2) $x \ln(x) + x^3$

4) $\frac{e^x + x^3}{x^2 + x^4}$

6) $\ln(\text{Arctan}(x))$.

Exercice 6 Calculer les développements limités en 0 suivant, à l'ordre demandé.

1) $(1+x) \ln(1+x)$, ordre 2

4) $\sqrt{1 + \cos(x)}$, ordre 2

2) $\frac{1}{1+x^2}$, ordre 4

5) $x \cos(x) - \sin(x)$, ordre 5

3) $(1+x)^x$, ordre 2

6) $\frac{x}{\sin(x)}$, ordre 2

Exercice 7 On définit les nombres complexes suivants.

$$a = 3 - 2i, \quad b = 1 + i, \quad c = -2 + i, \quad d = 1 - 3i.$$

Réaliser les calculs suivants.

1) $|a|$

3) $\frac{b}{d}$

5) $cd + b$

7) $\frac{a-c}{b+d}$

2) $1 - 3c$

4) b^4

6) $a^3 + c$

8) $\frac{ac}{bd}$

Exercice 8 Déterminer le noyau et l'image de chacune des matrices suivantes. On mettra le résultat sous la forme d'un sous-espace vectoriel engendré par un nombre minimal de vecteurs.

Vérifier la cohérence du résultat en utilisant le théorème du rang.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9 On définit les matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Réaliser les calculs suivants.

- | | | | |
|---------|--------------|----------|-------------|
| 1) AB | 3) $(A+B)^2$ | 5) C^2 | 7) A^{-1} |
| 2) BA | 4) AX | 6) C^6 | 8) B^{-1} |

Exercice 10 Observer les matrices suivantes, et déterminer leurs rangs. Rappel : le rang d'une matrice est le rang de la famille de ses colonnes. Pour déterminer le rang d'une matrice, on détermine donc le nombre maximal de colonnes de la matrice pouvant former une famille libre.

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$	3) $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
2) $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	4) $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 11 Résoudre les systèmes suivants. On écrira les solutions sous forme d'ensembles mathématiques, afin d'en lire directement une description géométrique.

1) $\begin{cases} 3x + 2y - z = -3 \\ x + y + 2z = 4 \\ 2x + y - z = -3 \end{cases}$	3) $\begin{cases} x - 2y + z = -2 \\ 3x - y + 2z = -2 \end{cases}$
2) $\begin{cases} x - 2y + z = -1 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$	4) $\begin{cases} x - 2y + z + 2t = 8 \\ -x + z + 3t = 3 \end{cases}$

Sommes et récurrence

Programme de révisions

Connaître les formules donnant $\sum_{k=1}^n k$, $\sum_{k=0}^n q^k$, $(a+b)^n$. Revoir la définition de $\binom{n}{k}$. Revoir la rédaction d'une récurrence. Revoir la formule de sommation télescopique.

Exercice(s)

Exercice 12 L'objectif de cet exercice est d'établir la formule donnant la valeur de $S_n = \sum_{k=1}^n k^2$, pour chaque $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Écrire le développement de $(k+1)^3$ et en déduire une expression de $(k+1)^3 - k^3$.
- 2) Simplifier la somme $\sum_{k=1}^n (k+1)^3 - k^3$.
- 3) En déduire une expression de $\sum_{k=1}^n k^2$ en fonction de $(n+1)^3$, de $\sum_{k=1}^n k$ et de $\sum_{k=1}^n 1$.
- 4) Simplifier l'expression précédente et en déduire une expression simple de $\sum_{k=1}^n k^2$.
- 5) Rédiger une démonstration par récurrence de la formule obtenue précédemment.

Exercice 13 On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 = -2$ et $u_1 = -1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

Démontrer par récurrence double que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n - 3$.

Nombres complexes

Programme de révisions

Revoir les formes algébriques et trigonométriques, le conjugué, le module (et la formule $z\bar{z} = |z|^2$), les formules d'Euler, la factorisation de $e^{ip} + e^{iq}$, les équations du second degré et $\mathbb{U}_n$.

Exercice(s)

Exercice 14 Donner la forme algébrique du nombre complexe $z = (2 + 2i)^7$.

Exercice 15 Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

- 1) Écrire $-i$ et $1 + i$ sous forme trigonométrique.
- 2) Résoudre les équations $z^n = -i$ et $z^n = 1 + i$.
- 3) Résoudre l'équation $(E) : z^2 - z + 1 - i = 0$.
- 4) En déduire les racines de l'équation $(F) : z^{2n} - z^n + 1 - i = 0$.

Exercice 16

- 1) Soit z un nombre complexe quelconque. Démontrer que z est un imaginaire pur si et seulement si $\bar{z} = -z$.

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on définit $z(\theta) = \frac{1 - e^{i\theta}}{1 + e^{i\theta}}$, lorsque cela a un sens.

- 1) Pour quels réels θ le nombre complexe $z(\theta)$ est-il correctement défini ?
- 2) En utilisant la conjugaison complexe, démontrer que, $z(\theta)$ est un imaginaire pur.
- 3) Retrouver ce résultat en calculant la forme algébrique de $z(\theta)$.

Indication : on pensera à factoriser le numérateur et le dénominateur par $e^{i\theta/2}$.

Études de fonctions

Programme de révisions

Revoir les fonctions usuelles (définition, ensemble de définition, dérivée).
Revoir les formules de dérivation et comment dresser un tableau de variations.

Exercice(s)

Exercice 17 Calculer les dérivées des expressions suivantes.

1) $\frac{d}{dx}(\ln(\cos(x)))$

2) $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)$

Exercice 18 Montrer que pour tout $x > -1$: $\ln(1+x) \leq x$.

Exercice 19 Soit f la fonction définie par $f(x) = \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$.

- 1) Donner le domaine de définition et le domaine de dérivabilité de f .
- 2) Vérifier que la dérivée de f est nulle. Qu'en déduit-on concernant la fonction f ?
- 3) Calculer $f(1)$ et $f(-1)$. Est-ce compatible avec le résultat de la question 2) ? Si ce n'est pas le cas, où est l'erreur ?

Exercice 20 Soit th la fonction définie par $\text{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

- 1) Justifier que th est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, déterminer une expression de $\text{th}'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Vérifier que $\text{th}'(x) = 1 - \text{th}^2(x)$.
- 2) Dresser le tableau des variations de la fonction th , et vérifier que th admet une réciproque, définie sur $] -1, 1[$.
- 3) Pour $y \in] -1, 1[$, calculer $(\text{th}^{-1})'(y)$. On pourra procéder de deux manières différentes.

Suites numériques

Programme de révisions

Revoir les définitions de suites majorées, minorées, bornées, croissantes, décroissantes, le théorème de limite monotone, le théorème d'encadrement, les suites adjacentes (et leur théorème), les croissances comparées. Revoir la définition de suite extraite et les résultats faisant le lien avec la notion de limite.

Exercice(s)

Exercice 21 Déterminer les limites suivantes.

1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - 3^n}{2^n}$

2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \sin(n)}{n^2 + 1}$

Exercice 22 On pose pour tout $n \geq 1$, $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, ainsi que :

$$v_n = H_n - \ln(n)$$

$$w_n = H_n - \ln(n+1)$$

- 1) Que vaut $H_{n+1} - H_n$, pour $n \geq 1$?
- 2) Montrer que les suites $(v_n)_{n \geq 1}$ et $(w_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes.
- 3) En déduire la nature de la suite (H_n) .

Exercice 23 Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n^2}$.

- 1) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $v_n \leq u_{n-1} - u_n$.
- 2) Que vaut $\sum_{i=2}^n u_{i-1} - u_i$, pour $n \geq 2$?
- 3) En déduire que la suite de terme général $S_n = \sum_{i=1}^n v_i$ converge, et majorer sa limite.

Calcul asymptotique

Programme de révisions

Revoir les équivalents (de suites, de fonctions), les o , les développements limités (techniques de calcul et formulaire), la formule de Taylor-Young.

Exercice(s)

Exercice 24 Déterminer les limites suivantes.

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} n - \sqrt{n^2 - n} \qquad 2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Exercice 25 On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

- 1) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\ln(1+x) \leq x$.
- 2) Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, montrer que $\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln(k)$.
- 3) En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $\ln(n+1) \leq u_n$.
- 4) Montrer que, pour tout $k \geq 2$, $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t}$.

Indication : comparer $\frac{1}{k}$ et $\frac{1}{t}$ lorsque $t \in [k-1, k]$, ou bien utiliser l'inégalité des accroissements finis sur $x \mapsto \int_{k-1}^x \frac{dt}{t}$.

- 5) En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq 1 + \ln(n)$.
- 6) Déduire des questions précédentes un équivalent de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 26 Étudier la position du graphe de l'application $f : x \mapsto \ln(1+x+x^2)$ par rapport à sa tangente en 0. Faire de même en 1.

Intégrales et équations différentielles

Programme de révisions

Revoir la structure de l'ensemble des solutions, la méthode de résolution des équations $y' + ay = b$ et $y'' + ay' + by = c$.

Revoir les calculs de primitive, les formules d'intégration par parties et de changement de variable.

Exercice(s)

Exercice 27 Résoudre les équations différentielles suivantes.

1) $y' + 3y = e^x$

3) $y'' + 2y' + y = -1$

2) $y' - y = \cos(x)$

4) $y'' - y = e^{2x}$

Pour les deux premières, déterminer la solution vérifiant $y(0) = 1$.

Pour les deux dernières, déterminer la solution vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 28 Calculer les intégrales suivantes, en procédant par intégration par parties.

1) $\int_0^{\pi/2} t \cos(t) dt$

2) $\int_0^1 \text{Arctan}(t) dt$

Exercice 29 Linéariser $\cos^2(x)$, et calculer $\int_0^\pi \cos^2(x) dx$.

Exercice 30 Calculer les intégrales suivantes, en effectuant un changement de variables.

1) $\int_1^3 \frac{dt}{\sqrt{t} + t\sqrt{t}}$ (poser $x = \sqrt{t}$)

2) $\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$ (poser $t = \sin(u)$)

Systèmes, calcul matriciel

Programme de révisions

Revoir les méthodes de résolution de systèmes linéaires, de calcul matriciel, notamment le produit. Revoir la définition d'inverse de matrice et les méthodes d'inversion matricielle.

Exercice(s)

Exercice 31 Résoudre le système
$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ x + 3y - z = 3 \end{cases}.$$

Exercice 32 Résoudre le système
$$\begin{cases} x - y + z - t = 1 \\ -x - z + 2t = -1 \end{cases}.$$

Exercice 33 Pour chacune de ces matrices, déterminer si elle est inversible et, le cas échéant, donner son inverse.

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

3) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

2) $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 34 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

- 1) Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = A + 2I_3$, où I_3 est la matrice identité 3×3 .
- 2) En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

Applications linéaires

Programme de révisions

Revoir les définitions d'application linéaire, d'endomorphisme, d'isomorphisme, d'automorphisme, de noyau et d'image, de matrice d'une application linéaire relativement à deux bases. Revoir les différentes notions de rang, et le théorème du rang.

Exercice(s)

Exercice 35 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(x, y, z) = (2x - y, y, 3x - 3y - z).$$

- 1) Déterminer trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ non nuls et vérifiant respectivement : $f(\vec{u}) = -\vec{u}$, $f(\vec{v}) = \vec{v}$ et $f(\vec{w}) = 2\vec{w}$.
- 2) Montrer que $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et écrire la matrice de f dans cette base.

Exercice 36 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ (en cas de difficultés à résoudre l'exercice, on pourra considérer le cas $n = 2$). On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{K}_n[X]$. On s'intéresse à l'application

$$u: P \mapsto (X^2 - 1)P'' + (2X + 1)P'.$$

- 1) Rappeler la dimension de E .
- 2) Vérifier que u est un endomorphisme de E .
- 3) Déterminer la matrice de u dans la base canonique de E .
- 4) Déterminer le noyau de u (on trouvera un polynôme P tel que $\text{Ker}(u) = \text{Vect}(P)$).
- 5) Déterminer le rang de u (essayer de répondre à cette question de plusieurs manières différentes – on peut en trouver au moins quatre).
- 6) Montrer que $\mathcal{B}' = (P, 2X + 1, 4X^2 + 2X - 1)$ est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
- 7) Calculer $u(2X + 1)$ et $u(4X^2 + 2X - 1)$.
- 8) Dans le cas $n = 2$, déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$. Que remarque-t-on ?

Probabilités

Programme de révisions

Revoir les formules donnant $P(A \cup B)$ et $P(\bar{A})$, la définition d'indépendance de deux événements, de probabilité conditionnelle, les formules des probabilités composées, totales et de Bayes, la formule de transfert, la formule de Kœnig-Huygens, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, les lois usuelles (avec ensemble de valeurs, espérance, variance).

Exercice(s)

Exercice 37 On dispose d'une pièce de monnaie truquée (deux côtés Pile), ainsi que d'une pièce ordinaire. On choisit sans regarder l'une de ces deux pièces et on la lance n fois ; on n'obtient que des Pile. À partir de quelle valeur de n peut-on être sûr·e à 99% qu'on a choisi la pièce truquée ?

Exercice 38 Soit $b, r, n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient b boules bleues et r boules rouges. On tire successivement n boules dans l'urne, avec remise.

- 1) Quelle est la probabilité de ne tirer que des boules rouges ?
- 2) Soit $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Quelle est la probabilité de tirer exactement k boules bleues ?

Exercice 39 Soit $b, r, n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient b boules bleues et r boules rouges. On tire successivement des boules dans l'urne, sans remise.

- 1) Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit rouge ?
- 2) Quelle est la probabilité que la deuxième boule tirée soit rouge ?
- 3) Les deux événements précédents sont-ils indépendants ?

Géométrie

Programme de révisions

Revoir le produit scalaire de deux vecteurs, le déterminant d'une famille de vecteurs (dans le plan et dans l'espace), avec les méthodes de calcul, les équations de droite et de plan. Revoir la projection orthogonale d'un point sur une droite ou un plan.

Exercice(s)

Exercice 40 On se place dans un plan, muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Pour chaque couple de points (A, B) , déterminer une représentation paramétrique et une représentation cartésienne de la droite (AB) .

1) $A(1, 2)$ et $B(-3, 1)$

2) $A(0, 1)$ et $B(2, 3)$

Exercice 41 On se place dans l'espace, muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Pour chaque triplet de points (A, B, C) , déterminer si ces points sont alignés ou pas, puis déterminer une représentation paramétrique et une représentation cartésienne de la droite passant par ces trois points (s'ils sont alignés), ou du plan passant par ces trois points (s'ils ne sont pas alignés).

1) $A(0, 1, 0)$, $B(1, 1, 0)$ et $C(0, 1, 1)$

2) $A(1, 1, 1)$, $B(2, 1, 0)$ et $C(3, 1, -1)$

Exercice 42 On se place dans l'espace, muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Déterminer une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + y - z = 1$, puis déterminer le projeté orthogonal du point $A(1, 2, 3)$ sur $\mathcal{P}$. Quelle est la distance de A à $\mathcal{P}$?

Formulaire

Trigonométrie

À connaître par cœur, ou à savoir retrouver rapidement.

- Valeurs des fonctions $\cos$, $\sin$ et $\tan$ en $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$; $\cos$ et $\sin$ en $\frac{\pi}{2}$; non définition de la tangente en $\frac{\pi}{2}$.
- Formules trigonométriques intervenant dans les termes suivants.

$$\cos(-\theta) \quad \sin(-\theta) \quad \tan(-\theta) \quad \cos(\theta + 2\pi) \quad \sin(\theta + 2\pi)$$

$$\tan(\theta + \pi) \quad \cos(\pi \pm \theta) \quad \sin(\pi \pm \theta) \quad \cos(\frac{\pi}{2} \pm \theta) \quad \sin(\frac{\pi}{2} \pm \theta)$$

$$\cos(a \pm b) \quad \sin(a \pm b) \quad \sin(2a) \quad \cos(2a) \quad (3 \text{ formules})$$

- Formule fondamentale $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ et savoir linéariser rapidement $\cos^2(\theta)$ et $\sin^2(\theta)$ à partir des formules donnant $\cos(2\theta)$.

Dérivées

Connaître les domaines de définition, de dérivabilité et les dérivées des fonctions suivantes ($a > 0$).

$$x \mapsto x^\alpha \text{ (distinguer } \alpha \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{Z}, \alpha \in \mathbb{R})$$

$$x \mapsto \sqrt{x} \quad x \mapsto e^x \quad x \mapsto a^x \quad x \mapsto \ln(x)$$

$$x \mapsto \cos(x) \quad x \mapsto \sin(x) \quad x \mapsto \tan(x) \quad (2 \text{ formes})$$

$$x \mapsto \operatorname{Arccos}(x) \quad x \mapsto \operatorname{Arcsin}(x) \quad x \mapsto \operatorname{Arctan}(x)$$

Connaître les formules de dérivation suivantes.

$$\frac{d}{dx}(\lambda u(x) + \mu v(x)) \quad \frac{d}{dx}(u(x)v(x)) \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)$$

Connaître la formule donnant $\frac{d}{dx}(v(u(x)))$ et la reconnaître dans les formules de dérivation suivantes (à connaître).

$$\begin{array}{lll} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{u(x)} \right) & \frac{d}{dx} (u(x)^n) & \frac{d}{dx} (\sqrt{u(x)}) \\ \frac{d}{dx} (e^{u(x)}) & \frac{d}{dx} (\ln(u(x))) & \frac{d}{dx} (\cos(u(x))) \\ \frac{d}{dx} (\sin(u(x))) & \frac{d}{dx} (\tan(u(x))) & \frac{d}{dx} (\text{Arcsin}(u(x))) \\ \frac{d}{dx} (\text{Arccos}(u(x))) & \frac{d}{dx} (\text{Arctan}(u(x))) & \end{array}$$

Primitives

Connaître par cœur, ou savoir retrouver rapidement, sur chaque intervalle du domaine de définition, une primitive des fonctions suivantes.

$$\begin{array}{lllll} x \mapsto x^\alpha & (\alpha \neq -1) & x \mapsto \frac{1}{x} & x \mapsto e^{ax} & x \mapsto \cos(ax) \\ x \mapsto \sin(ax) & x \mapsto \ln(x) & x \mapsto \frac{1}{x^2 + a^2} & x \mapsto \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} & \end{array}$$

Développements limités

Savoir donner les développements limités à deux termes puis à tout ordre des expressions suivantes (x étant au voisinage de 0).

$$\begin{array}{lllll} e^x & \cos(x) & \sin(x) & \ln(1+x) & \text{Arctan}(x) \\ \frac{1}{1-x} & \frac{1}{1+x} & (1+x)^\alpha & \tan(x) & (\text{ordre 3 uniquement}) \end{array}$$

Indications

Indication (Exercice 12).

2) Utiliser la formule de sommation télescopique.

5) Réponse : $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Indication (Exercice 14).

Passer par la forme exponentielle.

Indication (Exercice 15).

2) Les racines sont fortement suggérées par la question 1).

4) Voir que z est solution de (F) si et seulement si z^n est solution de (E) .

Indication (Exercice 16).

Pour quels θ a-t-on $e^{i\theta} = -1$? Que vaut $\overline{e^{i\theta}}$?

Indication (Exercice 17).

Toujours commencer par dériver le terme qui est à l'intérieur.

Indication (Exercice 18).

Étudier $x \mapsto x - \ln(1+x)$ et dresser son tableau de variations.

Indication (Exercice 19).

Dans le théorème « $f' = 0 \implies f$ constante », quelle propriété doit vérifier le domaine de définition de f ?

Indication (Exercice 20).

2) Remarquer que t est impaire et strictement croissante. Limites : factoriser par e^x ou e^{-x} .

3) Pour $y \in]-1, 1[$, résoudre en x l'équation $y = t(x)$. Cela donne $x = t^{-1}(y)$, qu'il suffit de dériver. On peut aussi utiliser la formule de cours donnant $(t^{-1})'(y)$.

Indication (Exercice 21).

1) Séparer en deux, utiliser les croissances comparées et reconnaître une suite géométrique.

2) Appliquer la valeur absolue, majorer le numérateur avec $|\sin(x)| \leq 1$, au dénominateur utiliser $n^2 + 1 \geq n > 0$.

Indication (Exercice 22).

3) Écrire $H_n = v_n + \ln(n)$.

Indication (Exercice 23).

- 1) Ramener au même dénominateur $u_{n-1} - u_n$.
- 2) Utiliser une simplification télescopique.
- 3) Sortir v_1 de la somme et utiliser les questions précédentes en sommant les inégalités.

Indication (Exercice 24).

- 1) Factoriser n et utiliser le DL de $(1+x)^\alpha$.
- 2) Utiliser $a^n = \exp(n \ln(a))$ et le DL de $\ln(1+x)$.

Indication (Exercice 25).

- 1) Étudier $x \mapsto x - \ln(1+x)$.
- 3) Sommer l'égalité précédente, repérer une simplification télescopique et utiliser l'inégalité obtenue à la première question.
- 4) Quel est le sens de variations de $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $[k-1, k]$?

Indication (Exercice 26).

Effectuer les DL de $f(x)$ et de $f(1+h)$ au voisinage de 0.

Indication (Exercice 28).

- 2) Dériver $\text{Arctan}(t)$, primitiver 1, et observer une dérivée logarithmique.

Indication (Exercice 29).

Utiliser une formule d'Euler et développer le carré, ou bien utiliser une formule trigonométrique sur $\cos(2x)$.

Indication (Exercice 34).

- 2) Ne pas mener de calcul d'inverse, mais utiliser la relation obtenue pour trouver une matrice B vérifiant $AB = I_3$.

Indication (Exercice 36).

- 2) Vérifier la linéarité et le fait que si $\deg(P) \leq n$, alors $\deg(u(P)) \leq n$.
- 3) Calculer $u(X^k)$ pour $0 \leq k \leq n$.
- 4) Observer que si $\deg(P) \geq 1$, alors $\deg(u(P)) = \deg(P)$.

Indication (Exercice 37).

Introduire l'événement T : « la pièce est truquée ». Quelle est sa probabilité ? Sachant T , quelle est la probabilité de n'obtenir que des Pile ? Et sachant $\bar{T}$?

Indication (Exercice 38).

Observer que l'on est dans une situation de référence : quelle est la loi suivie

par le nombre de boules bleues tirées ?

Indication (Exercice 39).

Introduire les événements R_1 : « la première boule tirée est rouge » et R_2 : « la seconde boule tirée est rouge ». Quelles sont les valeurs de $P(R_1)$ et de $P_{R_1}(R_2)$?

Résultats

Résultat (Exercice 1).

- | | | |
|---|--|--|
| 1) $\left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}$ | 3) $\left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{13\pi}{4} \right\}$ | 5) $\{-3\pi, -2\pi, -\pi, 0\}$ |
| 2) $\left\{ -\frac{\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3} \right\}$ | 4) $\{-4\pi, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi\}$ | 6) $\left\{ \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{17\pi}{6} \right\}$ |

Résultat (Exercice 2).

- | | |
|------------------|-------------------|
| 1) $(x-1)(x-4)$ | 3) $x(x-2)(x-3)$ |
| 2) $(x+1)(3x-1)$ | 4) $(x-1)^2(x+1)$ |

Résultat (Exercice 3).

- | | |
|---|--|
| 1) $\frac{2x^2 \ln(x) - 1 - x^2}{x \ln^2(x)}$ | 4) $-\frac{2}{(b-1)^2} \left(1 + \tan^2 \left(\frac{b+1}{b-1} \right) \right)$ |
| 2) $\cos^4(t) - 3 \sin^2(t) \cos^2(t)$ | 5) $(1 + \ln(u))u^u$ |
| 3) $10a(1+a^2)^4$ | 6) $v^3(1+4\ln(v))$ |

Résultat (Exercice 4).

- | | |
|--------------------------|--------------------|
| 1) $\frac{\sin^5(x)}{5}$ | 3) $\ln \sin(u) $ |
| 2) $\text{Arctan}(e^t)$ | 4) $\sqrt{1+v^2}$ |

Résultat (Exercice 5).

En 0

- | | | |
|--------|--------|--------|
| 1) x | 3) 1 | 5) 1 |
|--------|--------|--------|

- | | | |
|---------------|--------------------|-------------|
| 2) $x \ln(x)$ | 4) $\frac{1}{x^2}$ | 6) $\ln(x)$ |
|---------------|--------------------|-------------|

En $+\infty$

1) x^3

3) $\left(\frac{e}{2}\right)^x$

5) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

2) x^3

4) $\frac{e^x}{x^4}$

6) $\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Résultat (Exercice 6).

1) $x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

3) $1 + x^2 + o(x^2)$

5) $-\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{30} + o(x^5)$

2) $1 - x^2 + x^4 + o(x^4)$

4) $\sqrt{2} - \frac{x^2}{4\sqrt{2}} + o(x^2)$

6) $1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)$

Résultat (Exercice 7).

1) $\sqrt{13}$

3) $\frac{1}{5}(-1 + 2i)$

5) $2 + 8i$

7) $\frac{1}{2}(4 + i)$

2) $7 - 3i$

4) -4

6) $-11 - 45i$

8) $\frac{1}{2}(-3 + 2i)$

Résultat (Exercice 8).

1) $\text{Ker}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}\right), \text{Im}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

2) $\text{Ker}(B) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right), \text{Im}(B) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

3) $\text{Ker}(C) = \{\vec{0}\}, \text{Im}(C) = \mathbb{R}^3$

Résultat (Exercice 10).

1) $\text{rg}(A) = 1$

2) $\text{rg}(B) = 3$

3) $\text{rg}(C) = 2$

4) $\text{rg}(D) = 2$

Résultat (Exercice 11).

1) $\{(-1, 1, 2)\}$

2) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

3) $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

4) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$