

Soit E, F deux ensembles, $f : E \rightarrow F$ une application. À chaque fois, donner la définition quantifiée de la notion, ainsi que son interprétation en tant que nombre de solutions dans E de l'équation $y = f(x)$ (où y est à quantifier).

f est injective $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

f est surjective $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

f est bijective $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

Expliciter le lien entre ces trois notions.

Soit E, F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ (f est une application linéaire).

f est injective $\Leftrightarrow$

f est surjective $\Leftrightarrow$

Soit $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs de E .

$(x_1, \dots, x_n)$ est libre $\Leftrightarrow$

$(x_1, \dots, x_n)$ engendre E $\Leftrightarrow$

$(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E $\Leftrightarrow$

Expliciter le lien entre ces trois notions.

Soit E, F deux ensembles, $f : E \rightarrow F$ une application. À chaque fois, donner la définition quantifiée de la notion, ainsi que son interprétation en tant que nombre de solutions dans E de l'équation $y = f(x)$ (où y est à quantifier).

f est injective $\Leftrightarrow$

$$\forall x, y \in E, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

$\Leftrightarrow$

pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$, d'inconnue $x \in E$, admet au plus une solution

f est surjective $\Leftrightarrow$

$$\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$$

$\Leftrightarrow$

pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$, d'inconnue $x \in E$, admet au moins une solution

f est bijective $\Leftrightarrow$

$$\forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x)$$

$\Leftrightarrow$

pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$, d'inconnue $x \in E$, admet exactement une solution

Expliciter le lien entre ces trois notions.

$$f \text{ est bijective} \Leftrightarrow f \text{ est injective et surjective}$$

Soit E, F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ (f est une application linéaire).

f est injective $\Leftrightarrow$

$$\text{Ker}(f) = \{0_E\}$$

f est surjective $\Leftrightarrow$

$$\text{Im}(f) = F$$

Soit $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs de E .

$(x_1, \dots, x_n)$ est libre $\Leftrightarrow$

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

$(x_1, \dots, x_n)$ engendre $E \Leftrightarrow$

$$\forall x \in E, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$$

$(x_1, \dots, x_n)$ est une base de $E \Leftrightarrow$

$$\forall x \in E, \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$$

Expliciter le lien entre ces trois notions.

$$(x_1, \dots, x_n) \text{ est une base de } E \Leftrightarrow (x_1, \dots, x_n) \text{ est libre et engendre } E$$