

Feuille d'exercices n° 06 : **Déterminants, séries numériques**

Exercices à préparer

Exercice 1 (Lundi 02/11) On définit pour tout $n \geq 1$: $u_n = \int_0^{\pi/n} \frac{\sin(t)}{1+t} dt$.

- 1) Proposer une majoration simple de u_n , de la forme $u_n \leq \frac{C}{n^\alpha}$.
- 2) En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 2 (Vendredi 06/11) Déterminer un encadrement puis un équivalent lorsque $n \rightarrow +\infty$ de $S_n = \ln(n!)$.

Exercices élémentaires

Exercice 3 On considère pour tout $n \geq 1$ le déterminant $n \times n$ suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

- 1) Calculer D_1 , D_2 et D_3 .
- 2) Montrer que pour tout $n \geq 1$: $D_{n+2} = 3D_{n+1} - 2D_n$.
- 3) Calculer D_4 et D_5 . Conjecturer une expression pour D_n (comparer aux puissances de 2).
- 4) Démontrer la conjecture précédente.

Exercice 4 Pour quels réels a, b, c la famille suivante est-elle une base de $\mathbb{R}_2[X]$?

$$\mathcal{F}_{a,b,c} = ((X-a)^2, (X-b)^2, (X-c)^2)$$

Exercice 5 Soit E un $\mathbb{R}$ -ev de dimension 4, admettant une base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$. Posons $w = v_1 + v_2 + v_3 + v_4$. Déterminer pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ la famille suivante est une base de E .

$$\mathcal{F}_t = (v_1 + tw, v_2 + tw, v_3 + tw, v_4 + tw).$$

Exercice 6 Dans chaque cas, calculer un déterminant afin de déterminer si l'endomorphisme proposé est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

1) $u : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+z \\ y+z \end{pmatrix}$

2) $v : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-y \\ y-z \\ -x+z \end{pmatrix}$

Exercice 7 Dans chaque cas, calculer le déterminant de l'endomorphisme proposé, et dire s'il est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

- 1) $u : P \mapsto P' + P$ 2) $v : P \mapsto P(X+1) - P(X)$ 3) $w : P \mapsto XP' + P(1)$

Exercice 8 Déterminer la nature de chacune des séries suivantes.

- | | | |
|---------------------------------------|---|--|
| 1) $\sum \frac{n}{n^2+1}$ | 6) $\sum \frac{n^2+1}{n^2}$ | 11) $\sum \frac{1}{\ln n}$ |
| 2) $\sum n^2 e^{-n}$ | 7) $\sum \frac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3}$ | 12) $\sum \ln \left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1} \right)$ |
| 3) $\sum \frac{\sin^2(n)}{n\sqrt{n}}$ | 8) $\sum \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n$ | 13) $\sum \left(e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)$ |
| 4) $\sum \cos \frac{1}{n^2}$ | 9) $\sum \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right)$ | 14) $\sum \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$ |
| 5) $\sum \sin \frac{1}{n^2}$ | 10) $\sum \ln(1 + e^{-n})$ | |

Exercice 9 On étudie la suite (u_n) définie par : $u_0 \in]0, \pi/2[$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

- 1) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\sin(x) \leq x$, avec égalité si et seulement si $x = 0$.
- 2) Montrer que (u_n) est une suite décroissante et à termes positifs.
- 3) Déterminer l'existence et la valeur de la limite de (u_n) .
- 4) a) Donner un DL à l'ordre 3 de u_{n+1} en fonction de u_n , quand n tend vers $+\infty$. En déduire un équivalent de u_n^3 en fonction de $(u_n - u_{n+1})$.
b) Déterminer la nature de la série de terme général u_n^3 .
- 5) Déterminer la nature de la série de terme général $\ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$.
- 6) a) Donner un équivalent de $\ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$ en fonction de u_n , quand n tend vers $+\infty$.
b) En déduire la nature des séries de termes généraux u_n^2 et u_n .

Exercice 10 Que vaut $0,11111111 \dots$?

Exercices plus avancés

Exercice 11

- 1) Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension impaire. Montrer qu'il n'existe aucun endomorphisme f de E tel que $f^2 = -\text{Id}_E$, où $f^2 = f \circ f$.
- 2) Et si $\dim E$ est paire ?

Exercice 12 Soit E un $\mathbb{R}$ -ev de dimension n , et u un endomorphisme de rang 1 de E .

- 1) Quelle est la dimension du noyau de u ?
- 2) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u a toutes ses colonnes nulles, sauf la dernière.
- 3) Montrer que $\det(u + \text{Id}_E) = 1 + \text{Tr}(u)$.

Exercice 13 Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on pose $u_n = \ln n + a \ln(n+1) + b \ln(n+2)$. Comment choisir a et b de sorte que $\sum u_n$ converge ?

Dans le cas de convergence, donner la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.