

Feuille d'exercices n° 06 : **Déterminants, séries numériques**

TSI 2 – MATHÉMATIQUES

Lycée Gustave Eiffel

Année 2026/2027 – Semaine du 12 octobre

Exercice 1 (Lundi 02/11)

On définit pour tout $n \geq 1$: $u_n = \int_0^{\pi/n} \frac{\sin(t)}{1+t} dt$.

1. Proposer une majoration simple de u_n , de la forme $u_n \leq \frac{C}{n^\alpha}$.
2. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 2 (Vendredi 06/11)

Déterminer un encadrement puis un équivalent lorsque $n \rightarrow +\infty$ de $S_n = \ln(n!)$.

Exercice 3

On considère pour tout $n \geq 1$ le déterminant $n \times n$ suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

1. Calculer D_1 , D_2 et D_3 .
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$: $D_{n+2} = 3D_{n+1} - 2D_n$.
3. Calculer D_4 et D_5 . Conjecturer une expression pour D_n (comparer aux puissances de 2).
4. Démontrer la conjecture précédente.

Exercice 4

Pour quels réels a, b, c la famille suivante est-elle une base de $\mathbb{R}_2[X]$?

$$\mathcal{F}_{a,b,c} = ((X - a)^2, (X - b)^2, (X - c)^2)$$

Exercice 5

Soit E un $\mathbb{R}$ -ev de dimension 4, admettant une base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$. Posons $w = v_1 + v_2 + v_3 + v_4$. Déterminer pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ la famille suivante est une base de E .

$$\mathcal{F}_t = (v_1 + tw, v_2 + tw, v_3 + tw, v_4 + tw).$$

Exercice 6

Dans chaque cas, calculer un déterminant afin de déterminer si l'endomorphisme proposé est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

1. $u : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y + z \\ x + z \\ y + z \end{pmatrix}$

2. $v : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - y \\ y - z \\ -x + z \end{pmatrix}$

Exercice 7

Dans chaque cas, calculer le déterminant de l'endomorphisme proposé, et dire s'il est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

1. $u : P \mapsto P' + P$
2. $v : P \mapsto P(X + 1) - P(X)$
3. $w : P \mapsto XP' + P(1)$

Exercice 8

Déterminer la nature de chacune des séries suivantes.

1. $\sum \frac{n}{n^2 + 1}$

2. $\sum n^2 e^{-n}$

3. $\sum \frac{\sin^2(n)}{n\sqrt{n}}$

4. $\sum \cos \frac{1}{n^2}$

5. $\sum \sin \frac{1}{n^2}$

6. $\sum \frac{n^2 + 1}{n^2}$

7. $\sum \frac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3}$

8. $\sum \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

9. $\sum \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)$

10. $\sum \ln(1 + e^{-n})$

11. $\sum \frac{1}{\ln n}$

12. $\sum \ln \left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n - 1} \right)$

13. $\sum \left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right)$

14. $\sum \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$

Exercice 9

On étudie la suite (u_n) définie par : $u_0 \in]0, \pi/2[$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\sin(x) \leq x$, avec égalité si et seulement si $x = 0$.
2. Montrer que (u_n) est une suite décroissante et à termes positifs.
3. Déterminer l'existence et la valeur de la limite de (u_n) .
4. 4.1 Donner un DL à l'ordre 3 de u_{n+1} en fonction de u_n , quand n tend vers $+\infty$. En déduire un équivalent de u_n^3 en fonction de $(u_n - u_{n+1})$.
4.2 Déterminer la nature de la série de terme général u_n^3 .
5. Déterminer la nature de la série de terme général $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.
6. 6.1 Donner un équivalent de $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ en fonction de u_n , quand n tend vers $+\infty$.
6.2 En déduire la nature des séries de termes généraux u_n^2 et u_n .

Exercice 10

Que vaut $0,11111111\dots$?

Exercice 11

1. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension impaire. Montrer qu'il n'existe aucun endomorphisme f de E tel que $f^2 = -\text{Id}_E$, où $f^2 = f \circ f$.
2. Et si $\dim E$ est paire ?

Exercice 12

Soit E un $\mathbb{R}$ -ev de dimension n , et u un endomorphisme de rang 1 de E .

1. Quelle est la dimension du noyau de u ?
2. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u a toutes ses colonnes nulles, sauf la dernière.
3. Montrer que $\det(u + \text{Id}_E) = 1 + \text{Tr}(u)$.

Exercice 13

Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on pose $u_n = \ln n + a \ln(n+1) + b \ln(n+2)$.
Comment choisir a et b de sorte que $\sum u_n$ converge ?

Dans le cas de convergence, donner la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.