

Feuille d'exercices n° 05 : **Variables aléatoires finies, déterminants**

Exercices à préparer

Exercice 1 (Lundi 12/10) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit X, Y et Z trois variables aléatoires réelles, indépendantes, et de même loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

- 1) Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$: $P(X+Y=k) = \frac{k-1}{n^2}$.
- 2) En déduire que $P(X+Y=Z) = \frac{n-1}{2n^2}$.

Exercice 2 (Vendredi 16/10) On note A la matrice de dimensions $n \times n$ dont tous les coefficients valent 1. Pour quels $\lambda \in \mathbb{K}$ la matrice $\lambda I_n - A$ est-elle inversible ?

Exercices élémentaires

Exercice 3 On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 , indépendantes, d'espérances respectives m_1 et m_2 et d'écart-types respectifs $\sigma_1 > 0$ et $\sigma_2 > 0$.

- 1) Déterminer la valeur de $a \in [0, 1]$ qui minimise $\mathbf{V}(aX_1 + (1-a)X_2)$.
- 2) Pour cette valeur de a , que vaut $\mathbf{E}(aX_1 + (1-a)X_2)$?

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes, de même loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. On pose $Z = \max(X, Y)$.

- 1) Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, calculer $P(Z \leq k)$. Cette formule est-elle valide pour $k = 0$?
- 2) Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, exprimer $P(Z = k)$ en fonction de $P(Z \leq k)$ et de $P(Z \leq k-1)$.
- 3) En déduire la loi de Z .

Exercice 5 Soit X, Y, Z, T quatre variables aléatoires indépendantes et suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$. On note $M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$.

- 1) Quelle est la loi de XT ? Celle de YZ ?
- 2) Calculer $P(M \in \text{GL}_2(\mathbb{R}))$.

Exercice 6 Calculer les déterminants 2×2 suivants.

1) $a = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$

2) $b = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 4 \end{vmatrix}$

3) $c = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$

Exercice 7 Calculer les déterminants 3×3 suivants.

1) $a = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix}$

2) $b = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$

3) $c = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

Exercice 8 Calculer les déterminants 4×4 suivants.

$$1) a = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$2) b = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Exercice 9 Pour chaque matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et pour tout paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$, calculer $\det(\lambda I_3 - A)$. Donner un résultat factorisé.

$$1) A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ factoriser par } \lambda - 3$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ factoriser par } \lambda$$

Exercice 10 Pour quelles valeurs de $k \in \mathbb{R}$ les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Et pour $k \in \mathbb{C}$?

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -k \end{pmatrix}$$

$$2) B = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & k \end{pmatrix}$$

Exercice 11 Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Donner pour une expression simplifiée et factorisée de

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) \\ 1 & \cos(b) & \cos(2b) \\ 1 & \cos(c) & \cos(2c) \end{vmatrix}.$$

Exercice 12 On considère dans $\mathbb{R}^2$ l'arc $\mathcal{C}$ de la parabole d'équation $y = x^2$ situé entre les points $A = (-1, 1)$ et $B = (2, 4)$.

En quel(s) point(s) $X \in \mathcal{C}$ l'aire du triangle AXB est-elle maximale ?

Exercice 13 Déterminer une équation du plan de $\mathbb{R}^3$ contenant les trois points $A = (1, 0, 1)$, $B = (1, 2, 0)$ et $C = (-1, 1, 1)$.

Exercices plus avancés

Exercice 14 On considère deux variables aléatoires X et Y sur un même espace probabilisé fini, suivant respectivement les lois $\mathcal{B}(m, p)$ et $\mathcal{B}(n, p)$. Montrer que $X + Y$ suit la loi $\mathcal{B}(m + n, p)$.

Exercice 15 Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. On suppose que, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbf{P}(X = k) > 0$ et $\mathbf{P}(Y = k) > 0$.

On définit

$$H(X) = - \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(X = k) \ln(\mathbf{P}(X = k))$$

et

$$H(X, Y) = - \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} \mathbf{P}(X = k, Y = \ell) \ln(\mathbf{P}(X = k, Y = \ell)).$$

Montrer que $H(X, Y) = H(X) + H(Y)$.

Exercice 16 Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ anti-symétrique. Calculer $\det(A)$. Ce résultat vaut-il encore pour $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Généraliser ceci.