

Indications et éléments de correction, feuille d'exercices n° 05 (Variables aléatoires finies, déterminants)

Exercice 3

1) $V(aX_1 + (1-a)X_2) = a^2V(X_1) + (1-a)^2V(X_2) = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)a^2 - 2\sigma_2^2a + \sigma_2^2$. Minimum pour $a = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$.

2) $E((aX_1 + (1-a)X_2)) = am_1 + (1-a)m_2 = \frac{\sigma_2 m_1 + \sigma_1 m_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$

Exercice 4

1) Par indépendance de X et de Y :

$$P(Z \leq k) = P((X \leq k) \cap (Y \leq k)) = P(X \leq k)P(Y \leq k) = \frac{k}{n^2}.$$

Cette formule est valide pour $k = 0$: $P(Z \leq 0) = 0$.

2) On a $(Z \leq k) = (Z = k) \cup (Z \leq k-1)$ et cette union est disjointe :

$$P(Z \leq k) = P(Z = k) + P(Z \leq k-1)$$

et donc

$$P(Z = k) = P(Z \leq k) - P(Z \leq k-1).$$

3) La variable aléatoire Z est à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ et pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$P(Z = k) = \frac{k^2 - (k-1)^2}{n^2} = \frac{2k-1}{n^2}.$$

Exercice 5

1) XT est à valeurs dans $\{0, 1\}$ donc suit une loi de Bernoulli.

Par indépendance de X et de T :

$$P(XT = 1) = P((X = 1) \cap (T = 1)) = P(X = 1)P(T = 1) = p^2.$$

Ainsi, $XT \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$. C'est la même chose pour YZ .

2) $\det(M) = XT - YZ$. Ainsi, M est inversible si et seulement si $XT \neq YZ$.

Ainsi,

$$P(M \in \text{GL}_2(\mathbb{R})) = P(((XT = 1) \cap (YZ = 0)) \cup ((XT = 0) \cap (YZ = 1))).$$

Cette union est disjointe :

$$P(M \in \text{GL}_2(\mathbb{R})) = P((XT = 1) \cap (YZ = 0)) + P((XT = 0) \cap (YZ = 1)).$$

Comme XT et YZ sont indépendantes (lemme des coalitions),

$$P(M \in \text{GL}_2(\mathbb{R})) = P(XT = 1)P(YZ = 0) = P(XT = 0)P(YZ = 1) = 2p^2(1-p)^2.$$

Exercice 6

$$1) a = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 14$$

$$2) b = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$3) c = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

Exercice 7

$$1) a = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix} = -18$$

$$2) b = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 6$$

$$3) c = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 14$$

Exercice 8

$$1) a = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$2) b = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 160$$

Exercice 9

$$1) \det(\lambda I_3 - A) = (\lambda - 3)(\lambda^2 - \lambda - 1) = (\lambda - 3)(\lambda - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})(\lambda - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})$$

$$2) \det(\lambda I_3 - A) = \lambda(\lambda - 1)^2$$

Exercice 10

$$1) \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & k \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -k \end{vmatrix} = -3(k + 1)$$

A est inversible si et seulement si $k \neq -1$.

$$2) \det(B) = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & k \end{vmatrix} = 2k^2 + 7$$

B est inversible si et seulement si $k \notin \left\{ i\sqrt{\frac{7}{2}}, -i\sqrt{\frac{7}{2}} \right\}$.

Exercice 11

Utiliser $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$.

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) \\ 1 & \cos(b) & \cos(2b) \\ 1 & \cos(c) & \cos(2c) \end{vmatrix} = 2(\cos(b) - \cos(a))(\cos(c) - \cos(a))(\cos(c) - \cos(b)).$$

Exercice 12 On note $X = (x, x^2)$, où $x \in [-1, 2]$. Cette aire est

$$\mathcal{A}(x) = \left| \begin{array}{cc} 2-x & -1-x \\ 4-x^2 & 1-x^2 \end{array} \right| = 6 + 3x - 3x^2.$$

La fonction A est un trinôme du second degré ayant pour racines -1 et 2 . Le coefficient dominant de A est négatif, donc A atteint son maximum en $x = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$.

La valeur maximale de cette aire est donc $A(\frac{1}{2}) = \frac{27}{4}$.

Exercice 13 Soit $M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a $M \in (ABC)$ si et seulement si la famille $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est liée, donc si et seulement si

$$\det_{\text{can.}}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0.$$

On écrit alors

$$\det_{\text{can.}}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & -2 \\ y & 2 & 1 \\ z-1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = x + 2y + 4z - 5.$$

Ainsi, une équation de (ABC) est $x + 2y + 4z - 5$.

Exercice 14 Il suffit de réaliser le calcul sur tout couple (X', Y') ayant la même loi (jointe) que (X, Y) . Avec $X_1, \dots, X_{m+n}$ indépendantes et suivant toutes la loi $\mathcal{B}(p)$, il suffit de prendre

$$\begin{aligned} X' &= X_1 + \dots + X_n, \\ Y' &= X_{n+1} + \dots + X_{n+m}. \end{aligned}$$

Ainsi, $X' + Y' \hookrightarrow \mathcal{B}(n + m, p)$.

Exercice 15 Par indépendance de X et de Y ,

$$\begin{aligned} H(X, Y) &= - \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} \mathbf{P}(X = k) \mathbf{P}(Y = \ell) \ln(\mathbf{P}(X = k) \mathbf{P}(Y = \ell)) \\ &= - \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} \mathbf{P}(X = k) \mathbf{P}(Y = \ell) (\ln(\mathbf{P}(X = k)) + \ln(\mathbf{P}(Y = \ell))) \\ &= - \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \mathbf{P}(X = k) \mathbf{P}(Y = \ell) (\ln(\mathbf{P}(X = k)) + \ln(\mathbf{P}(Y = \ell))) \\ &= - \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \mathbf{P}(X = k) \mathbf{P}(Y = \ell) \ln(\mathbf{P}(X = k)) - \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \mathbf{P}(X = k) \mathbf{P}(Y = \ell) \ln(\mathbf{P}(Y = \ell)) \\ &= - \left(\sum_{k=1}^n \mathbf{P}(X = k) \ln(\mathbf{P}(X = k)) \right) \left(\sum_{\ell=1}^n \mathbf{P}(Y = \ell) \right) - \left(\sum_{k=1}^n \mathbf{P}(X = k) \right) \left(\sum_{\ell=1}^n \mathbf{P}(Y = \ell) \ln(\mathbf{P}(Y = \ell)) \right). \end{aligned}$$

Comme $\sum_{k=1}^n \mathbf{P}(X = k) = \sum_{\ell=1}^n \mathbf{P}(Y = \ell) = 1$, on obtient bien $H(X, Y) = H(X) + H(Y)$.

En posant $f(k) = P(X = k)$, $g(\ell) = P(Y = \ell)$ et $h(k, \ell) = P(X = k, Y = \ell) = f(k)g(\ell)$, on a

$$H(X, Y) = E(-\ln(h(X, Y))) = E(-\ln(f(X)g(Y))) = E(-\ln(f(X)) - \ln(g(Y))) = H(X) + H(Y).$$

Exercice 16 On a $\det A = \det A^\top = \det(-A) = (-1)^3 \det A = -\det A$, donc $\boxed{\det(A) = 0}$.

Avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, on a bien $A^\top = -A$ et $\det(A) = 1$.

Ce n'est donc pas vrai en dimension deux.