

Feuille d'exercices n° 04 : **Variables aléatoires finies**

Exercices à préparer

Exercice 1 (Lundi 05/10) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans une urne, on place pour chaque $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$: deux jetons numérotés i , et un jeton numéroté $n + i$.

On tire un jeton dans l'urne, et on note X le résultat.

1) Déterminer la loi de X .

2) Montrer que pour toute fonction réelle f , $E(f(X)) = \frac{1}{3n} \left(\sum_{k=1}^n f(k) + \sum_{k=1}^{2n} f(k) \right)$.

3) En déduire l'espérance et la variance de X .

Exercice 2 (Vendredi 09/10) On considère une urne dans laquelle est disposée n boules, numérotées de 1 à n .

On réalise un premier tirage dans cette urne, et l'on note X le résultat obtenu.

Dans un deuxième temps, on dispose une seconde urne. Si l'on a obtenu $X = k$ au premier tirage, on dispose k boules dans cette urne : une portant le numéro 1, les autres portant le numéro 0.

On réalise un tirage dans cette deuxième urne, et l'on note Y le numéro tiré.

1) Déterminer la loi de X et l'ensemble dans lequel Y prend ses valeurs.

2) Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Déterminer la loi de Y conditionnellement à l'événement $[X = k]$.

3) En appliquant la formule des probabilités totales, déterminer la loi de Y .

4) Les variables X et Y sont-elles indépendantes (on distinguera le cas $n = 1$ des autres cas) ?

Exercices élémentaires

Exercice 3 On lance un dé à six faces $n \in \mathbb{N}^*$ fois (on pourra noter $X_1, \dots, X_n$ les numéros tirés). Donner la loi, l'espérance et la variance de chacune des variables aléatoires suivantes.

1) X : premier numéro tiré.

2) Y : dernier numéro tiré.

3) Z : nombre de « un » tirés.

4) T : 1 si le premier numéro est pair, 0 sinon.

5) U : 1 si aucun six n'est tiré, 0 sinon.

Exercice 4 On considère un devoir de mathématiques avec une moyenne de 8 et un écart-type de 2. Déterminer un intervalle (le plus petit possible) centré autour de la moyenne tel qu'une copie tirée au hasard appartienne à celui-ci avec une probabilité supérieure à 75%.

Exercice 5 Dans une urne contenant une boule numérotée 1, deux boules numérotées 2, ... et 5 boules numérotées 5, on tire une boule au hasard. Déterminer la loi, l'espérance et la variance du numéro de la boule tirée.

Exercice 6 Soit $p \in]0, 1[$. On réalise un pile ou face, donnant pile avec probabilité p . On notera $X = 1$ si l'on a obtenu pile, et face sinon.

Si l'on a obtenu pile, on lance un dé à six faces usuel. Si l'on a obtenu face, on lance un dé à 20 faces. On note D le résultat du dé lancé.

1) Déterminer la loi de X , et les lois conditionnelles de D sachant les événements $[X = 1]$ et $[X = 0]$.

- 2) Déterminer la loi de D .
- 3) On observe *a posteriori* que $D = 1$. Quelle est la probabilité que l'on ait obtenu pile au début de l'expérience ?

Exercice 7 On considère le couple de variables aléatoires (X, Y) dont la loi conjointe est donnée dans le tableau ci-contre.

$X \backslash Y$	0	1	2	3
1	1/10	2/10	1/10	1/10
2	1/10	0	1/10	1/10
3	1/10	0	1/10	0

- 1) Déterminer les lois marginales du couple (X, Y) . Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
- 2) Calculer l'espérance et la variance de X et de Y .
- 3) Écrire les lois conditionnelles de X sachant $(Y = y)$ et de Y sachant $(X = x)$ pour tout $x \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$ et tout $y \in \llbracket 0; 3 \rrbracket$.
- 4) Déterminer la loi de $U = XY$.
- 5) Déterminer la loi de $V = \min(X, Y)$.
- 6) Représenter sous forme d'un tableau la loi conjointe de U et V .
- 7) Déterminer $\text{Cov}(X, Y)$.

Exercice 8 Une urne contient $2n$ boules, numérotées de 1 à $2n$. On choisit un entier $k \in \llbracket 1; 2n \rrbracket$. On effectue deux tirages, avec remise, et l'on note T_1 et T_2 les deux numéros tirés.

Si le numéro de la première boule est strictement supérieur à k , on le conserve, et l'on enregistre le numéro de la boule. Sinon, on enregistre celui de la deuxième boule tirée.

On note X le numéro enregistré, et Z le rang du tirage où l'on a enregistré ce numéro.

- 1) Trouver la loi conjointe de (X, Z) .
- 2) Trouver la loi de X et calculer son espérance.
- 3) Trouver un entier k qui maximise $E(X)$.
- 4) En utilisant un point de vue qualitatif, déterminer le signe de $\mathbf{Cov}(X, Z)$.

Exercice 9 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On réalise un tirage dans une urne contenant n jetons, numérotés de 1 à n , et l'on note J le numéro du jeton tiré. Si $J = k$, on lance k dés à six faces, et l'on note S le nombre de six tirés.

- 1) Déterminer la loi de J et, pour chaque $k \in J(\Omega)$, la loi de S conditionnellement à l'événement $(J = k)$.
- 2) Soit $x \in]0, 1[$, que vaut $\sum_{k=0}^n x^k$? Calculer de deux manières différentes $\frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^n x^k \right)$.
- 3) Calculer la probabilité de l'événement $(S = 1)$.

Exercices plus avancés

Exercice 10 Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé fini (Ω, P) . Trouver les réels $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ minimisant $E[(Y - (aX + b))^2]$.

Exercice 11 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$. Montrer que $E[X] = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k)$.