

Indications et éléments de correction, feuille d'exercices n° 04 (Variables aléatoires finies)

Exercice 3

- 1) $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1, 6])$
- 2) $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([1, 6])$
- 3) $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{6})$
- 4) $T \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{1}{2})$.
- 5) $U \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\left(\frac{5}{6}\right)^n\right)$

Exercice 4 Notons N la note de la copie tirée. $E(N) = 8$ et $V(N) = 2^2 = 4$.
Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, si $a > 0$,

$$P(|N - 8| \geq a) \leq \frac{4}{a^2},$$

donc en passant à l'événement contraire,

$$P(|N - 8| < a) = 1 - P(|N - 8| \geq a) \geq 1 - \frac{4}{a^2},$$

soit

$$P(N \in]8 - a, 8 + a[) \geq 1 - \frac{4}{a^2}.$$

Il suffit de trouver a vérifiant $1 - \frac{4}{a^2} = \frac{3}{4}$ (on trouve $a = 4$).

Ainsi, $P(N \in]4, 12[) \geq \frac{3}{4}$.

Exercice 5 L'urne contient 15 boules. Il y a une chance sur quinze de tirer la boule numéro 1, deux chances sur quinze de tirer une des deux boules portant le numéro deux, *etc*.

On note N le numéro tiré.

k	1	2	3	4	5
$P(N = k)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$

$$E(N) = \frac{55}{15} = \frac{11}{3}.$$

$$E(N^2) = \frac{225}{15} = 15.$$

$$V(N^2) = 15 - \frac{11^2}{9} = \frac{14}{9}.$$

Exercice 6

- 1) $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$

Conditionnellement à l'événement $[X = 1]$, $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1, 6])$.

Conditionnellement à l'événement $[X = 0]$, $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1, 20])$.

2) D est à valeurs dans $\llbracket 1, 20 \rrbracket$. Si $1 \leq k \leq 20$, par la formule des probabilités totales,

$$P(D = k) = P(X = 0)P_{(X=0)}(D = k) + P(X = 1)P_{(X=1)}(D = k) = (1-p)P_{(X=0)}(D = k) + pP_{(X=1)}(D = k).$$

Si $1 \leq k \leq 6$, on a $P_{(X=0)}(D = k) = \frac{1}{20}$ et $P_{(X=1)}(D = k) = \frac{1}{6}$, donc

$$P(D = k) = \frac{1-p}{20} + \frac{p}{6} = \frac{3+7p}{60}.$$

Si $7 \leq k \leq 20$, on a $P_{(X=0)}(D = k) = \frac{1}{20}$ et $P_{(X=1)}(D = k) = 0$, donc

$$P(D = k) = \frac{1-p}{20}.$$

3) On utilise la formule de Bayes :

$$P_{(D=1)}(X = 1) = \frac{P(X = 1)P_{(X=1)}(D = 1)}{P(D = 1)} = \frac{\frac{p}{6}}{\frac{3+7p}{60}} = \frac{10p}{3+7p}.$$

Exercice 7

1) Loi de X :

k	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{5}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$

Loi de Y :

k	0	1	2	3
$P(Y = k)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$

On a $P(X = 2, Y = 1) = 0 \neq P(X = 2)P(Y = 1)$, donc X et Y ne sont pas indépendantes.

2) $E[X] = \frac{17}{10}$, $E[Y] = \frac{14}{10}$.

3) Loi de X sachant $[Y = 0]$:

k	1	2	3
$P_{[Y=0]}(X = k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Conditionnellement à $[Y = 0]$, $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{1, 2, 3\})$.

Loi de X sachant $[Y = 1]$:

k	1	2	3
$P_{[Y=1]}(X = k)$	1	0	0

Conditionnellement à $[Y = 1]$, X vaut 1 avec probabilité 1.

Loi de X sachant $[Y = 2]$:

k	1	2	3
$P_{[Y=2]}(X = k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Conditionnellement à $[Y = 2]$, $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{1, 2, 3\})$.

Loi de X sachant $[Y = 3]$:

k	1	2	3
$P_{[Y=3]}(X=k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Conditionnellement à $[Y=0]$, $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{1, 2\})$.

Loi de Y sachant $[X=1]$:

k	0	1	2	3
$P_{[X=1]}(Y=k)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

Loi de Y sachant $[X=2]$:

k	0	1	2	3
$P_{[X=2]}(Y=k)$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Conditionnellement à $[X=2]$, $Y \hookrightarrow \mathcal{U}(\{0, 2, 3\})$.

Loi de Y sachant $[X=3]$:

k	0	1	2	3
$P_{[X=3]}(Y=k)$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0

Conditionnellement à $[X=3]$, $Y \hookrightarrow \mathcal{U}(\{0, 2\})$.

4) Réfléchir aux valeurs prises par X et Y . U est à valeurs dans $\{0, 1, 2, 3, 4, 6, 9\}$. On écrit :

$$\triangleright [U=0] = [Y=0], \text{ donc } P(U=0) = P(Y=0) = \frac{3}{10}.$$

$$\triangleright [U=1] = [X=1] \cap [Y=1], \text{ donc } P(U=1) = P(X=1, Y=1) = \frac{2}{10}$$

$\triangleright [U=2] = ([X=2] \cap [Y=1]) \cup ([X=1] \cap [Y=2])$, et cette union est disjointe, donc

$$P(U=2) = P(X=2, Y=1) + P(X=1, Y=2) = 0 + \frac{1}{10} = \frac{1}{10}.$$

$\triangleright [U=3] = ([X=3] \cap [Y=1]) \cup ([X=1] \cap [Y=3])$, et cette union est disjointe, donc

$$P(U=3) = P(X=3, Y=1) + P(X=1, Y=3) = 0 + \frac{1}{10} = \frac{1}{10}.$$

$$\triangleright [U=4] = [X=2] \cap [Y=2], \text{ donc } P(U=4) = P(X=2, Y=2) = \frac{1}{10}$$

$\triangleright [U=6] = ([X=3] \cap [Y=2]) \cup ([X=2] \cap [Y=3])$, et cette union est disjointe, donc

$$P(U=6) = P(X=3, Y=2) + P(X=2, Y=3) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10}.$$

$$\triangleright [U=9] = [X=3] \cap [Y=3], \text{ donc } P(U=9) = P(X=3, Y=3) = 0$$

En résumé. :

k	0	1	2	3	4	6	9
$P(U=k)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	0

5) Réfléchir aux valeurs prises par X et Y . V est à valeurs dans $\{0, 1, 2, 3\}$.

$$\triangleright [V=0] = [Y=0], \text{ donc } P(V=0) = P(Y=0) = \frac{3}{10}.$$

$\triangleright$ On a

$$[V=1] = ([X=1] \cap [Y=1]) \cup ([X=1] \cap [Y>1]) \cup ([X>1] \cap [Y=1]),$$

et cette union est disjointe, donc en décomposant ceci

$$P(V=1) = P(X=1, Y=1) + P(X=1, Y=2) + P(X=1, Y=3) + P(X=2, Y=1) + P(X=3, Y=1)$$

▷ On a

$$[V = 2] = ([X = 2] \cap [Y = 2]) \cup ([X = 2] \cap [Y = 3]) \cup ([X = 3] \cap [Y = 2]),$$

et cette union est disjointe, donc en décomposant ceci

$$P(V = 2) = P(X = 2, Y = 2) + P(X = 2, Y = 3) + P(X = 3, Y = 2) = \frac{3}{10}$$

▷ On a $[V = 3] = [X = 3] \cap [Y = 3]$, donc $P(V = 3) = P(X = 3, Y = 3) = 0$

Résumé :

k	0	1	2	3
$P(V = k)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	0

6) On procède de même.

$V \backslash U$	0	1	2	3	4	6	9
0	$\frac{3}{10}$	0	0	0	0	0	0
1	0	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	0	0
2	0	0	0	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	0
3	0	0	0	0	0	0	0

$$7) \text{ Cov}(X, Y) = E(U) - E(X)E(Y) = \frac{23}{10} - \frac{17}{10} \times \frac{14}{10} = -\frac{2}{25}.$$

Exercice 8

1) Pour $k + 1 \leq i \leq 2n$,

$$P(X = i, Z = 1) = P(T_1 = i) = 1/(2n)$$

Pour $1 \leq k \leq i$,

$$P(X = i, Z = 1) = 0.$$

Pour $1 \leq i \leq n$,

$$P(X = i, Z = 2) = P([T_1 \leq k] \cap [T_2 = i]) = P(T_1 \leq k)P(T_2 = i) = k/(2n)^2$$

2) Pour $i > k$,

$$P(X = i) = (2n + k)/(4n^2)$$

Pour $i \leq k$

$$P(X = i) = k/4n^2$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^k \frac{ki}{4n^2} + \sum_{i=k+1}^{2n} \frac{i(2n+k)}{4n^2} \\ &= \frac{k}{4n^2} \sum_{i=1}^{2n} i + \frac{1}{2n} \sum_{i=k+1}^{2n} i \\ &= \frac{k}{4n^2} \sum_{i=1}^{2n} i + \frac{1}{2n} \left(\sum_{i=1}^{2n} i - \sum_{i=1}^k i \right) \\ &= \frac{k}{4n^2} \frac{2n(2n+1)}{2} + \frac{1}{2n} \left(\frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{k(k+1)}{2} \right) \\ &= \frac{k(2n+1)}{4n} + \frac{2n(2n+1) - k(k+1)}{4n} \\ &= \frac{k(2n+1) + 2n(2n+1) - k(k+1)}{4n} \\ &= \frac{4n^2 + 2n + 2kn - k^2}{4n} \end{aligned}$$

3) Trinôme du second degré, maximal pour $k = n$, on a alors $E(X) = \frac{5n^2 + 2n}{4n}$

4) négatif

Exercice 9

1) $J \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.

Soit $1 \leq k \leq n$, conditionnellement à $(J = k)$, $S \hookrightarrow \mathcal{B}(k, \frac{1}{6})$.

2) $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$.

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^n x^k \right) = \sum_{k=1}^n kx^{k-1}$$

et

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^n x^k \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \right) = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

3) $P_{(J=k)}(S=1) = \binom{k}{1} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6} = \frac{k}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$

Par la formule des probabilités totales :

$$P(S=1) = \sum_{k=1}^n P(J=k)P_{(J=k)}(S=1) = \frac{1}{6n} \sum_{k=1}^n k \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}.$$

Avec le résultat précédent en $x = \frac{5}{6}$:

$$P(S=1) = \frac{6}{n} \left(1 - (n+1) \left(\frac{5}{6}\right)^n + n \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} \right).$$

Exercice 10 Fixer a , étudier le problème en fonction de b , on obtient $\hat{b} = E[Y] - aE[X]$.

Puis optimiser par rapport à a .

Exercice 11

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{k=0}^n kP(X=k) \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\sum_{i=0}^{k-1} 1 \right) P(X=k) \\ &= \sum_{0 \leq i < k \leq n} P(X=k) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=i+1}^n P(X=k) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} P(X > i) \end{aligned}$$