

Feuille d'exercices n° 03 : Compléments d'algèbre linéaire

Exercices à préparer

Exercice 1 (Lundi 28/09) On définit l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ par $u \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 2y + z \\ x - 2y + 2z \\ 2x - y - 2z \end{pmatrix}$.

On définit aussi $\mathcal{P} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ et $\mathcal{D} = \text{Vect} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- 1) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathcal{P} \oplus \mathcal{D}$.
- 2) Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ sont tous les deux stables par u .
- 3) En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est particulièrement simple (et écrire cette matrice).

Exercice 2 (Vendredi 02/10) On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la nature géométrique de f , et ses éléments caractéristiques.

Exercices élémentaires

Exercice 3 Soit dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (4, 1, 4)$ et $v_3 = (2, -1, 4)$.

- 1) Montrer que v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires. Faire de même avec v_1 et v_3 , puis avec v_2 et v_3 .
- 2) La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre ?

Exercice 4 Soit les fonctions $f_1 : x \mapsto e^x$, $f_2 : x \mapsto e^{2x}$, $f_3 : x \mapsto e^{3x}$ et $h : x \mapsto x^2$, toutes définies sur $\mathbb{R}$.

- 1) Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3) est libre.
- 2) Quelle est la dimension de $F = \text{Vect}(f_1, f_2, f_3)$?
- 3) Est-ce que $h \in F$?

Exercice 5 On définit l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ par $u : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y + z \\ y \\ x + z \end{pmatrix}$. On définit aussi

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0 \right\} \text{ et } \mathcal{D} = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- 1) Déterminer la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
- 2) Déterminer une base de $\mathcal{P}$ et une base de $\mathcal{D}$.
- 3) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathcal{P} \oplus \mathcal{D}$. Exhiber les projecteurs associés.
- 4) Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ sont tous les deux stables par u .

- 5) En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est particulièrement simple (et écrire cette matrice).

Exercice 6 On considère l'application $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2y \\ -2z \\ x + 3y + 4z \end{pmatrix}$, ainsi que le plan $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x + 2y + 2z = 0$.

- 1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Déterminer $\text{tr}(f)$.
- 2) Montrer que $\mathcal{P}$ est stable par f .
- 3) Déterminer $\mathcal{D} = \{ \vec{u} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{u}) = 2\vec{u} \}$. Montrer que $\mathcal{D}$ est stable par f .
- 4) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathcal{P} \oplus \mathcal{D}$.
- 5) Construire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est particulièrement simple.

Exercice 7 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -x & + & 2y \\ -2x & + & 4y \end{pmatrix}$.
Quelle est la nature de f ? Déterminer ses éléments caractéristiques.

Exercice 8 Quelle est la nature de l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$? Déterminer ses éléments caractéristiques.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -5x + 2y \\ -12x + 5y \\ -4x + 2y - z \end{pmatrix}$$

Exercice 9 On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la nature géométrique de f , et ses éléments caractéristiques.

Exercice 10 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a + b = d \right\}$.

- 1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En déterminer une base.
- 2) Montrer que $\mathcal{D} = \text{Vect}(A)$ est un supplémentaire de F dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- 3) Déterminer la projection sur F parallèlement à $\mathcal{D}$.

Exercices plus avancés

Exercice 11 Dans l'espace vectoriel E des fonctions réelles, on considère les fonctions $f_n : t \mapsto e^{nt}$.
Montrer que la famille $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre. Est-elle génératrice ?

Exercice 12 Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont des sous-espaces vectoriels stables par u .

Exercice 13 Soit $B \in \mathbb{R}[X]$ non constant, dont on note n le degré. Si A est un polynôme, on note $R(A)$ son reste dans la division euclidienne par B .

- 1) Montrer que R est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
- 2) Que vaut $R(A)$ si $\deg(A) < n$?
- 3) Quelle est la nature de R ? Quels sont ses éléments caractéristiques ?