

Indications et éléments de correction, feuille d'exercices n° 03 (Compléments d'algèbre linéaire)

Exercice 3

- 1) Ces vecteurs ne sont pas nuls. Résoudre en $\lambda \in \mathbb{R}$ le système

$$v_1 = \lambda v_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 &= 4\lambda \\ 1 &= \lambda \\ 0 &= 4\lambda \end{cases}$$

Il n'y a pas de solution, donc v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires. Faire de même pour v_1 et v_3 , v_2 et v_3 .

- 2) Non : $v_2 - v_3 = 2v_1$.

Exercice 4

- 1) Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, supposons que la fonction $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3$ est nulle : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x} + \lambda_3 e^{3x} = 0.$$

En multipliant ceci par e^{-x} , on obtient

$$\lambda_1 + \lambda_2 e^x + \lambda_3 e^{2x} = 0.$$

On passe à la limite lorsque $x \rightarrow -\infty$ pour obtenir $\lambda_1 = 0$. On procède de même pour obtenir $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, donc (f_1, f_2, f_3) est libre.

- 2) Par définition, $\dim(F) = 3$.

- 3) Si $h \in F$, il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x} + \lambda_3 e^{3x} = x^2.$$

En passant à la limite lorsque $x \rightarrow -\infty$, on obtient

$$x^2 \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0,$$

ce qui est absurde, donc $h \notin F$.

Exercice 5

1) $\text{Mat}_{\text{can.}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

2) Une base de $\mathcal{P}$: $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$

Une base de $\mathcal{D}$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

- 3) Raisonner par analyse-synthèse.

$$p_{\mathcal{P} // \mathcal{D}} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x - y - z \\ 2y \\ -x - y + z \end{pmatrix}$$

$$p_{\mathcal{D} // \mathcal{P}} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \frac{x + y + z}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- 4) Calculer $u\left(\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) 2\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc si $\vec{v} \in \mathcal{D}$, alors $u(\vec{v}) \in \mathcal{D}$.

Prendre $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$, alors en sommant les coordonnées de $u\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ on obtient :

$$2(x + y + z) = 0.$$

Ainsi, si $\vec{v} \in \mathcal{P}$, alors $u(\vec{v}) \in \mathcal{P}$.

- 5) Considérer la base adaptée $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

On obtient comme matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La décomposition par blocs permet de retrouver le résultat précédent.

Exercice 6

- 1) Prendre $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, calculer $f(\lambda X + \mu Y)$ et vérifier que l'on obtient

$\lambda f(X) + \mu f(Y)$. Ainsi, f est linéaire.

On a évidemment $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Écrire la matrice de f dans la base canonique. $\text{tr}(f)=4$.

- 2) Considérer $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$. Alors, $f(X) = \begin{pmatrix} -2y \\ -2z \\ x + 3y + 4z \end{pmatrix}$ et l'on calcule

$$-2y + 2(-2z) + 2(x + 3y + 4z) = 2(x + 2y + 2z) = 0.$$

Ainsi, $f(X) \in \mathcal{P}$.

- 3) Résoudre en $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ le système $f(X) = 2X$. $\mathcal{D} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Soit $u \in \mathcal{D}$, on a par définition

$$f(u) = 2u \in \mathcal{D}.$$

- 4) Comme $\dim(\mathcal{D}) + \dim(\mathcal{P}) = 1 + 2 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, il suffit de montrer que $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \{\vec{0}\}$.

Prendre $u = \begin{pmatrix} \lambda \\ -\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{D} \cap \mathcal{P}$, calculer

$$\lambda + 2(-\lambda) + 2\lambda = \lambda = 0,$$

donc $u = \vec{0}$, donc $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \{\vec{0}\}$.

- 5) Considérer une base de $\mathcal{P}$, par exemple $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$, concaténer avec $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ce qui donne

la base adaptée $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Écrire la matrice de u dans cette base.

Exercice 7 La matrice de f dans la base canonique est $M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

On calcule $M^2 = M$, donc f est une projection. On résout $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (ou on observe l'image de f).

f est la projection sur $\text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et parallèlement à $\text{Vect} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 8 La matrice de f dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 \\ -12 & 5 & 0 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

On calcule $M^2 = I_3$, donc f est une symétrie. On résout $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

f est la symétrie par rapport à $\text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et parallèlement à $\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Exercice 9 $M^2 = M$ donc f est une projection. On résout $MX = 0$ et $MX = X$ (ou on détermine l'image de M).

f est la projection sur $\text{Vect}(1 + X, 2X + X^2)$ et parallèlement à $\text{Vect}(-1 + X^2)$.

Exercice 10

$$1) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in F \Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a+b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $F = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$.

2) Raisonner par analyse-synthèse.

Analyse : soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ que l'on écrit

$$M = N + \lambda A,$$

avec $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ainsi,

$$x + y - t = a + b - d + \lambda + \lambda - \lambda = 0,$$

donc $\lambda = x + y - t$ et

$$N = M - \lambda A = \begin{pmatrix} -y + t & -x + t \\ -x - y + z + t & -x - t + 2t \end{pmatrix}.$$

Synthèse : soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, on pose $N = \begin{pmatrix} -y + t & -x + t \\ -x - y + z + t & -x - t + 2t \end{pmatrix}$ et $N' = (x + y - t)A$, et l'on vérifie que $M = N + N'$, $N \in F$ et $N' \in \text{Vect}(A)$.

3) C'est

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -y + t & -x + t \\ -x - y + z + t & -x - t + 2t \end{pmatrix}.$$

Exercice 11 Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, supposons que $\sum_{k=0}^n \lambda_k f_k = 0$, soit pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=0}^n \lambda_k e^{kt} = 0$$

En multipliant par e^{-nt} , on obtient :

$$\lambda_n + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k e^{(k-n)t} = 0$$

En passant à la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$, on obtient $\lambda_n = 0$. Il suffit de réitérer ce processus, ou d'effectuer une récurrence, pour obtenir que $\lambda_0 = \dots = \lambda_n = 0$.

Ainsi, (f_n) est libre.

Cette famille n'est pas génératrice : toute fonction engendrée par la famille $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est continue, ce qui n'est pas le cas de toutes les fonctions appartenant à E .

Exercice 12 Soit $x \in \text{Ker}(u)$, alors $u(x) = 0_E \in \text{Ker}(u)$, donc $\text{Ker}(u)$ est stable par u .

Soit $x \in \text{Im}(u)$. Par définition, $u(x) \in \text{Im}(u)$, donc $\text{Im}(u)$ est stable par u .

Exercice 13

- 1) Prendre $A_1, A_2 \in \mathbb{R}[X]$, écrire leurs divisions euclidiennes

$$A_i = BQ_i + R(A_i)$$

et prendre $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\lambda A_1 + \mu A_2 = B(\lambda Q_1 + \mu Q_2) + \lambda R(A_1) + \mu R(A_2).$$

Les règles de manipulation sur le degré donnent

$$\deg(\lambda R(A_1) + \mu R(A_2)) \leq \max(\deg(R(A_1)), \deg(R(A_2))) < \deg(B),$$

donc on a écrit une division euclidienne, et

$$R(\lambda A_1 + \mu A_2) = \lambda R(A_1) + \mu R(A_2).$$

Il est évident que $R : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$.

- 2) $R(A) = A$?
 3) $R \circ R = R$, donc R est une projection. R est la projection sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, et parallèlement à $B\mathbb{R}[X] = \{ BP \mid P \in \mathbb{R}[X] \}$.