

Feuille d'exercices n° 02 : **Intégrales généralisées en  $+\infty$ , compléments d'algèbre linéaire**

Exercices à préparer

**Exercice 1 (Lundi 21/09)** Montrer que l'ensemble  $H = \{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \text{Tr}(M) = 0 \}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , et en déterminer une base.

**Exercice 2 (Vendredi 25/09)** On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$  et le polynôme  $P = X^2 - 4X + 3$ .

- 1) Montrer que  $P(A) = 0$ , et factoriser  $P$ .
- 2) Justifier que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $a_n, b_n \in \mathbb{R}$  et  $Q_n \in \mathbb{R}[X]$  vérifiant

$$X^n = P(X)Q_n(X) + a_n + b_nX.$$

- 3) En évaluant cette relation en deux réels bien choisis, déterminer un système vérifié par  $a_n$  et  $b_n$ , et en déduire leurs valeurs.
- 4) Calculer  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Exercices élémentaires

**Exercice 3** Déterminer la nature de chacune de ces intégrales.

1)  $\int_7^{+\infty} \left( \sqrt{1 + \sin\left(\frac{1}{t}\right)} - 1 \right) dt$

4)  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$

2)  $\int_0^{+\infty} (1 + 2\cos(t))e^{-3t} dt.$

5)  $\int_e^{+\infty} \frac{du}{\ln(u)}$

3)  $\int_e^{+\infty} \frac{\cos(t)e^{-\cos^2(t)}}{t^2} dt$

6)  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3+\sin(x)}} dx$

**Exercice 4** Pour chaque matrice, donner sa transposée, sa trace (si c'est possible), dire si elle est symétrique ou anti-symétrique.

1)  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

3)  $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

2)  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

4)  $D = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

**Exercice 5** Soit  $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ . Montrer que  $M^\top M$  et  $MM^\top$  sont symétriques. Quelles sont leurs dimensions ?

**Exercice 6** On considère une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , et l'on définit sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  la fonction

$$f : M \mapsto A^\top M + MA.$$

- 1) Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
- 2) Montrer que  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  sont stables par  $f$ .
- 3) Dans cette question uniquement, on prend  $n = 2$  et  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Déterminer une base dans laquelle la matrice de  $f$  est particulièrement simple, et déterminer le rang de  $f$ , ainsi que son noyau.

**Exercice 7** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que si  $A$  est symétrique, alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A^n$  est symétrique. Que peut-on dire sur  $A^n$  si  $A$  est antisymétrique ?

**Exercice 8** Soit  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

- 1) Déterminer une matrice  $S$  symétrique et une matrice  $A$  antisymétrique vérifiant  $M = S + A$ .
- 2) Calculer  $AS$  et  $SA$ . En déduire une expression de  $M^n$  en fonction de  $S$ ,  $A$  et  $n$ , valide pour tout  $n \geq 1$ .
- 3) Calculer  $S^2$  en fonction de  $S$ , et donner pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  une expression de  $S^n$ .
- 4) Calculer  $A^2$  et  $A^3$ . Exprimer  $A^3$  en fonction de  $A$ , et montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A^{2n+1} = (-3)^n A$ .
- 5) En déduire une expression de  $A^{2n}$ , valide pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .  
*Indication* : on utilisera l'expression de  $A^{2n-1}$  trouvée précédemment.
- 6) *Application* : Donner  $M^{2026}$  et  $M^{2027}$ .

**Exercice 9** Déterminer les traces des endomorphismes de  $\mathbb{R}^3$  suivants.

$$1) f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x & +2y & -z \\ -x & +5y & -4z \\ -2x & +3y & -z \end{pmatrix} \qquad 2) g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x & +2y & -z \\ x & -y & +z \\ 3x & -y & +4z \end{pmatrix}$$

**Exercice 10** On considère l'application  $f : P \mapsto P - XP'$ .

- 1) Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
- 2) Déterminer la trace de  $f$ .
- 3) Reprendre tout cela sur  $\mathbb{R}_n[X]$ .

---

Exercices plus avancés

---

**Exercice 11** On considère l'intégrale généralisée  $I = \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt$ .

- 1) En procédant par intégration par parties, montrer que  $I$  est de même nature que  $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t\sqrt{t}} dt$ .
- 2) En déduire la nature de  $I$ .

**Exercice 12** Soit  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ , soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

- 1) Exprimer  $X^\top X$  en fonction de  $x_1, \dots, x_n$ . Que retrouve-t-on de bien connu dans les cas  $n = 2$  et  $n = 3$  ?
- 2) Montrer que si  $X^\top X = 0$ , alors  $X = 0$ .
- 3) Montrer par double inclusion que  $\text{Ker}(M) = \text{Ker}(M^\top M)$ .

**Exercice 13** Soit  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  deux matrices symétriques. Montrer que  $AB$  est symétrique si et seulement si  $AB = BA$ .

**Exercice 14** Soit  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  tels que  $AB - BA = A$ . Montrer que pour tout  $p \geq 1$  :  $\text{Tr}(A^p) = 0$ .

**Exercice 15** Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de rang 1.

- 1) Montrer qu'il existe une colonne  $C$  et une ligne  $L$  telles que  $M = CL$ .
- 2) En déduire que  $M^2 = \text{Tr}(M)M$ .