

Feuille d'exercices n° 02 : **Intégrales généralisées en $+\infty$, compléments d'algèbre linéaire**

TSI 2 – MATHÉMATIQUES

Lycée Gustave Eiffel

Année 2026/2027 – Semaine du 14 septembre

Exercice 1 (Lundi 21/09)

Montrer que l'ensemble $H = \{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \text{Tr}(M) = 0 \}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et en déterminer une base.

Exercice 2 (Vendredi 25/09)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ et le polynôme $P = X^2 - 4X + 3$.

1. Montrer que $P(A) = 0$, et factoriser P .
2. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ et $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant

$$X^n = P(X)Q_n(X) + a_n + b_nX.$$

3. En évaluant cette relation en deux réels bien choisis, déterminer un système vérifié par a_n et b_n , et en déduire leurs valeurs.
4. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3

Déterminer la nature de chacune de ces intégrales.

1.

$$\int_7^{+\infty} \left(\sqrt{1 + \sin\left(\frac{1}{t}\right)} - 1 \right) dt$$

2.

$$\int_0^{+\infty} (1 + 2 \cos(t)) e^{-3t} dt.$$

3.

$$\int_e^{+\infty} \frac{\cos(t) e^{-\cos^2(t)}}{t^2} dt$$

4.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^t}$$

5.

$$\int_e^{+\infty} \frac{du}{\ln(u)}$$

6.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3+\sin(x)}} dx$$

Exercice 4

Pour chaque matrice, donner sa transposée, sa trace (si c'est possible), dire si elle est symétrique ou anti-symétrique.

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

3. $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

4. $D = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Exercice 5

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que $M^{\top}M$ et $MM^{\top}$ sont symétriques. Quelles sont leurs dimensions ?

Exercice 6

On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et l'on définit sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la fonction

$$f : M \mapsto A^T M + MA.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont stables par f .
3. Dans cette question uniquement, on prend $n = 2$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer une base dans laquelle la matrice de f est particulièrement simple, et déterminer le rang de f , ainsi que son noyau.

Exercice 7

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A est symétrique, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n est symétrique. Que peut-on dire sur A^n si A est antisymétrique ?

Exercice 8

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice S symétrique et une matrice A antisymétrique vérifiant $M = S + A$.
2. Calculer AS et SA . En déduire une expression de M^n en fonction de S , A et n , valide pour tout $n \geq 1$.
3. Calculer S^2 en fonction de S , et donner pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ une expression de S^n .
4. Calculer A^2 et A^3 . Exprimer A^3 en fonction de A , et montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^{2n+1} = (-3)^n A$.
5. En déduire une expression de A^{2n} , valide pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Indication : on utilisera l'expression de A^{2n-1} trouvée précédemment.
6. *Application* : Donner M^{2026} et M^{2027} .

Exercice 9

Déterminer les traces des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ suivants.

1. $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x & +2y & -z \\ -x & +5y & -4z \\ -2x & +3y & -z \end{pmatrix}$

2. $g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x & +2y & -z \\ x & -y & +z \\ 3x & -y & +4z \end{pmatrix}$

Exercice 10

On considère l'application $f : P \mapsto P - XP'$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la trace de f .
3. Reprendre tout cela sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 11

On considère l'intégrale généralisée $I = \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt$.

1. En procédant par intégration par parties, montrer que I est de même nature que $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t\sqrt{t}} dt$.
2. En déduire la nature de I .

Exercice 12

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Exprimer $X^\top X$ en fonction de $x_1, \dots, x_n$. Que retrouve-t-on de bien connu dans les cas $n = 2$ et $n = 3$?
2. Montrer que si $X^\top X = 0$, alors $X = 0$.
3. Montrer par double inclusion que $\text{Ker}(M) = \text{Ker}(M^\top M)$.

Exercice 13

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices symétriques. Montrer que AB est symétrique si et seulement si $AB = BA$.

Exercice 14

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $AB - BA = A$. Montrer que pour tout $p \geq 1$: $\text{Tr}(A^p) = 0$.

Exercice 15

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.

1. Montrer qu'il existe une colonne C et une ligne L telles que $M = CL$.
2. En déduire que $M^2 = \text{Tr}(M)M$.