

Indications et éléments de correction, feuille d'exercices n° 02 (Intégrales généralisées en $+\infty$, compléments d'algèbre linéaire)

Exercice 3

- 1) $\int_7^{+\infty} \left(\sqrt{1 + \sin\left(\frac{1}{t}\right)} - 1 \right) dt$ diverge, $\left(\sqrt{1 + \sin\left(\frac{1}{t}\right)} - 1 \right) \sim \frac{1}{2t}$.
- 2) $\int_0^{+\infty} (1 + 2\cos(t))e^{-3t} dt$ converge (absolument), $|(1 + 2\cos(t))e^{-3t}| \leq 3e^{-3t}$.
- 3) $\int_e^{+\infty} \frac{\cos(t)e^{-\cos^2(t)}}{t^2} dt$ converge, $\left| \frac{\cos(t)e^{-\cos^2(t)}}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$
- 4) $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^t}$ converge, si $t \geq 2$, $\frac{1}{t^t} \leq \frac{1}{t^2}$
- 5) $\int_e^{+\infty} \frac{du}{\ln(u)}$ diverge $\frac{1}{u} = o\left(\frac{1}{\ln(u)}\right)$
- 6) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3+\sin(x)}} dx$ converge, $\frac{1}{x^{3+\sin(x)}} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Exercice 4

- 1) $A^\top = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, A n'est ni symétrique, ni anti-symétrique.
- 2) $B^\top = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, B n'est ni symétrique, ni anti-symétrique.
- 3) $C^\top = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, C est anti-symétrique, mais n'est pas symétrique.
- 4) $D^\top = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, D n'est ni symétrique, ni anti-symétrique.

Exercice 5 $(M^\top M)^\top = M^\top (M^\top)^\top = M^\top M$, donc $M^\top M$ est symétrique, de taille $p \times p$.
On fait de même pour $MM^\top$, qui est symétrique, de taille $n \times n$.

Exercice 6

- 1) Pour $M, M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a clairement $f(M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On calcule ensuite

$$\begin{aligned} f(\lambda M + \mu M') &= A^\top (\lambda M + \mu M') + (\lambda M + \mu M') A \\ &= \lambda(A^\top M + MA) + \mu(A^\top M' + M'A) \\ &= \lambda f(M) + \mu f(M'). \end{aligned}$$

Ainsi, f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2) Prendre $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$: $M^\top = M$. Observer que

$$f(M)^\top = (A^\top M + MA)^\top = M^\top (A^\top)^\top + A^\top M^\top = A^\top M + MA = f(M).$$

Ainsi, $f(M)$ est symétrique, donc $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est stable par f .

On montre de même que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est stable par f .

3) Considérer une base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, par exemple (M_1, M_2, M_3) avec $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Considérer la base de $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ formée de $M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Comme $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$: $\mathcal{B} = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Calculer $f(M_1) = M_3$, $f(M_2) = -M_3$, $f(M_3) = -2M_1 + 2M_2$, $f(M_4) = 0$.

On obtient

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On calcule $\text{rg}(f) = \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) = 2$.

On calcule $\text{Ker}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Cela donne $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(I_2, M_4)$.

Exercice 7 On montre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(A^\top)^n = (A^n)^\top$.

Ainsi, si A est symétrique, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(A^n)^\top = (A^\top)^n = A^n$, donc A^n est symétrique.

Si A est antisymétrique, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(A^n)^\top = (A^\top)^n = (-1)^n A^n$. Si n est pair, $(-1)^n = 1$, A^n est symétrique. Si n est impair, $(-1)^n = -1$, A^n est antisymétrique.

Exercice 8

- 1) $S = \frac{1}{2}(M + M^\top) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \frac{1}{2}(M - M^\top) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- 2) $AS = SA = 0$. Appliquer la formule du binôme de Newton : $M^n = A^n + S^n$.
- 3) $S^2 = 3S$. Récurrence : $S^n = 3^{n-1}S$.
- 4) $A^2 = S - 3I_3$ et $A^3 = -3A$. Récurrence : $A^{2n+1} = (-3)^n A$.
- 5) $A^{2n} = A \times A^{2n-1} = (-3)^{n-1} A^2 = (-3)^{n-1} S + (-3)^n I_3$.
- 6) $M^{2026} = 3^{2025} S + (-3)^{1012} S + (-3)^{1013} I_3$ et $M^{2027} = 3^{2026} S + (-3)^{1013} A$.

Exercice 9

- 1) $\text{tr}(f) = 7$
- 2) $\text{tr}(g) = 6$

Exercice 10

- 1) Procéder de manière élémentaire pour la linéarité.

Calculer $f(1) = 1$, $f(X) = 0$ et $f(X^2) = -X^2$.

Ainsi, par linéarité, $f(\mathbb{R}_2[X]) \subset \mathbb{R}_2[X]$.

- 2) $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$\text{tr}(f) = 0$.

3) $f(X^n) = (1 - n)X^n$.

$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{diag}(1, 0, \dots, -(n-1))$.

$\text{tr}(f) = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} k = 1 - \frac{n(n-1)}{2} = -\frac{n^2 - n - 2}{2} = -\frac{(n+1)(n-2)}{2}$.

Exercice 11 On considère l'intégrale généralisée $I = \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt$.

- 1) Intégrer par parties $\int_{\pi/2}^M \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt$. Supposer qu'une des deux intégrales généralisées converge, et passer à la limite lorsque $M \rightarrow +\infty$. Faire de même dans « l'autre sens » pour établir la réciproque.
- 2) Montrer la convergence absolue de la seconde intégrale.

Exercice 12

1) $X^\top X = \sum_{k=1}^n x_k^2$, on reconnaît $\|X\|^2$.

2) Évident.

3) Prendre $X \in \text{Ker}(M)$, voir que $M^\top MX = 0$, donc $\text{Ker}(M) \subset \text{Ker}(M^\top M)$.

Prendre $X \in \text{Ker}(M^\top M)$, calculer $X^\top M^\top MX$ de deux manières différentes pour avoir l'inclusion réciproque.

Exercice 13 $(AB)^\top = B^\top A^\top = BA$.

Ainsi, $(AB)^\top = AB$ si et seulement si $AB = BA$.

Exercice 14 Prouver par récurrence que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A^p B - B A^p = p A^{p-1} (AB - BA)$. Commencer par traiter les cas $p = 2$ et $p = 3$.

Utiliser la propriété de la trace.

Exercice 15

1) $\text{Im}(M) = \text{Vect}(C)$, avec $\ell_1, \dots, \ell_n$ tels que $C_i = \ell_i C$ et $L = (\ell_1 \dots \ell_n)$, observer que $M = CL$.

2) Calculer M^2 et observer que $LC = \text{tr}(M)$.