

Feuille d'exercices n° 01 : **Rappels et compléments d'intégration**

Exercices à préparer

**Exercice 1 (Lundi 14/09)**

- 1) Montrer que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)}$  converge.
- 2) Déterminer deux réels  $a, b$  tels que pour tout  $t > 0$  :

$$\frac{1}{(t+1)(t+2)} = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{t+2}.$$

- 3) En déduire la valeur de cette intégrale.

**Exercice 2 (Vendredi 18/09)** Déterminer la nature de  $I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{t^2} dt$ , puis la calculer par intégration par parties.

Exercices élémentaires

**Exercice 3** Déterminer les limites de chacune des suites définies par le terme général suivant.

1)  $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2 + k^2}$

2)  $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2 + k^2}$

3)  $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^3 + nk^2}$

**Exercice 4** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue, soit  $T > 0$  tels que la fonction  $x \mapsto \int_x^{x+T} f(t) dt$  est constante.

- 1) Soit  $F$  une primitive de  $f$ . Écrire  $\int_x^{x+T} f(t) dt$  en fonction de  $F$ ,  $x$  et  $T$ .
- 2) Montrer que  $f$  est  $T$ -périodique.

**Exercice 5** Pour chaque question, on pourra poser un changement de variable.

- 1) Montrer que :  $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t} dt = \frac{\pi}{4}$ .
- 2) En déduire :  $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} + t}$ .

**Exercice 6** Sans calcul, déterminer la nature de chacune des intégrales suivantes, et donner la valeur de celles qui convergent.

1)  $\int_0^{+\infty} e^{-3t} dt$

2)  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}$

3)  $\int_0^{+\infty} 2^{-t} dt$

**Exercice 7** En procédant par calcul direct, déterminer la nature de chaque intégrale et, le cas échéant, sa valeur.

1)  $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t \ln(t)}$

2)  $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t(1 + \ln^2(t))}$

**Exercice 8** Pour chaque intégrale : justifier sa convergence, puis la calculer.

1)  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$

2)  $\int_0^{+\infty} te^{-t^2} dt$

**Exercice 9** Déterminer la nature de chacune de ces intégrales.

1)  $\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt$

3)  $\int_1^{+\infty} \sqrt{t+1} - \sqrt{t-1} dt$

2)  $\int_2^{+\infty} \frac{3t\sqrt{t}}{t^5 - 2t^3\sqrt{t}} dt$

4)  $\int_0^{+\infty} 3t\sqrt{t}e^{-5t} dt$

---

Exercices plus avancés

---

**Exercice 10** Pour tout entier naturel  $n \geq 2$ ,  $A_1, \dots, A_n$  sont les sommets consécutifs d'un polygone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1. Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n A_1 A_k .$$

**Exercice 11** On considère l'intégrale généralisée  $I = \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt$ .

- 1) En procédant par intégration par parties, montrer que  $I$  est de même nature que  $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t\sqrt{t}} dt$ .
- 2) En déduire la nature de  $I$ .

**Exercice 12** Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  continue et décroissante, telle que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  converge.

- 1) En raisonnant par l'absurde, justifier que pour tout  $x \geq 0$ ,  $f(x) \geq 0$ .
- 2) En déduire que  $f$  admet une limite finie en  $+\infty$ , et démontrer par l'absurde que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .
- 3) Écrire  $\int_{x/2}^x f(t) dt$  en fonction de  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ , et en déduire que  $\int_{x/2}^x f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .
- 4) Montrer que  $xf(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ . Traduire ceci avec un  $o$ .

**Exercice 13** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue. On suppose que  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  converge, et l'on définit pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

- 1) Que peut-on dire de  $F$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$  ?
- 2) En déduire que si  $(x_n)$  et  $(y_n)$  sont deux suites tendant vers  $+\infty$ , alors  $\int_{x_n}^{y_n} f(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .
- 3) Minorer  $\int_{(2n+1)\pi}^{(2n+2)\pi} e^{-t \sin(t)} dt$  par une quantité ne dépendant pas de  $n$ .
- 4) Que peut-on en déduire sur  $\int_0^{+\infty} e^{-t \sin(t)} dt$  ?