

Feuille d'exercices n° 01 : **Rappels et compléments d'intégration**

TSI 2 – MATHÉMATIQUES

Lycée Gustave Eiffel

Année 2026/2027 – Semaine du 7 septembre

Exercice 1 (Lundi 14/09)

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)}$ converge.
2. Déterminer deux réels a, b tels que pour tout $t > 0$:

$$\frac{1}{(t+1)(t+2)} = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{t+2}.$$

3. En déduire la valeur de cette intégrale.

Exercice 2 (Vendredi 18/09)

Déterminer la nature de $I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{t^2} dt$, puis la calculer par intégration par parties.

Exercice 3

Déterminer les limites de chacune des suites définies par le terme général suivant.

1.
$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2 + k^2}$$

2.
$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2 + k^2}$$

3.
$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^3 + nk^2}$$

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, soit $T > 0$ tels que la fonction $x \mapsto \int_x^{x+T} f(t) dt$ est constante.

1. Soit F une primitive de f . Écrire $\int_x^{x+T} f(t) dt$ en fonction de F , x et T .
2. Montrer que f est T -périodique.

Exercice 5

Pour chaque question, on pourra poser un changement de variable.

1. Montrer que :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t} dt = \frac{\pi}{4}.$$

2. En déduire : $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}+t}.$

Exercice 6

Sans calcul, déterminer la nature de chacune des intégrales suivantes, et donner la valeur de celles qui convergent.

1. $\int_0^{+\infty} e^{-3t} dt$

2. $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}$

3. $\int_0^{+\infty} 2^{-t} dt$

Exercice 7

En procédant par calcul direct, déterminer la nature de chaque intégrale et, le cas échéant, sa valeur.

1. $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t \ln(t)}$

2. $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t(1 + \ln^2(t))}$

Exercice 8

Pour chaque intégrale : justifier sa convergence, puis la calculer.

1. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$

2. $\int_0^{+\infty} te^{-t^2} dt$

Exercice 9

Déterminer la nature de chacune de ces intégrales.

1. $\int_1^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}} \right) dt$

2. $\int_2^{+\infty} \frac{3t\sqrt{t}}{t^5 - 2t^3\sqrt{t}} dt$

3. $\int_1^{+\infty} \sqrt{t+1} - \sqrt{t-1} dt$

4. $\int_0^{+\infty} 3t\sqrt{t}e^{-5t} dt$

Exercice 10

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, $A_1, \dots, A_n$ sont les sommets consécutifs d'un polygône régulier inscrit dans un cercle de rayon 1. Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n A_1 A_k .$$

Exercice 11

On considère l'intégrale généralisée $I = \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt$.

1. En procédant par intégration par parties, montrer que I est de même nature que $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t\sqrt{t}} dt$.
2. En déduire la nature de I .

Exercice 12

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue et décroissante, telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge.

1. En raisonnant par l'absurde, justifier que pour tout $x \geq 0$, $f(x) \geq 0$.
2. En déduire que f admet une limite finie en $+\infty$, et démontrer par l'absurde que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.
3. Écrire $\int_{x/2}^x f(t) dt$ en fonction de $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, et en déduire que $\int_{x/2}^x f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.
4. Montrer que $xf(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Traduire ceci avec un o .

Exercice 13

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On suppose que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge, et l'on définit pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

1. Que peut-on dire de F lorsque $x \rightarrow +\infty$?
2. En déduire que si (x_n) et (y_n) sont deux suites tendant vers $+\infty$, alors $\int_{x_n}^{y_n} f(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
3. Minorer $\int_{(2n+1)\pi}^{(2n+2)\pi} e^{-t \sin(t)} dt$ par une quantité ne dépendant pas de n .
4. Que peut-on en déduire sur $\int_0^{+\infty} e^{-t \sin(t)} dt$?