

Indications et éléments de correction, feuille d'exercices n° 01 (Rappels et compléments d'intégration)

Exercice 3

- 1) $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2 + k^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4}$
- 2) $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2 + k^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2)}{2}$
- 3) $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^3 + nk^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{\pi}{4}$

Exercice 4

- 1) $\int_x^{x+T} f(t) dt = F(x+T) - F(x).$
- 2) Dériver par rapport à x : $0 = f(x+T) - f(x).$

Exercice 5

- 1) Poser $u = \frac{\pi}{2} - t$ pour montrer que $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t} dt$, puis sommer les deux intégrales pour obtenir la valeur $\frac{\pi}{4}$.
- 2) Dans l'intégrale $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t} dt$, poser $u = \sin(t)$. $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} + t} = \frac{\pi}{4}.$

Exercice 6

- 1) Converge, $\int_0^{+\infty} e^{-3t} dt = \frac{1}{3}$
- 2) Diverge
- 3) Converge, $\int_0^{+\infty} 2^{-t} dt = \frac{1}{\ln(2)}$

Exercice 7

- 1) Diverge
- 2) Converge, $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t(1 + \ln^2(t))} = \frac{\pi}{4}$

Exercice 8

- 1) $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$
- 2) $\int_0^{+\infty} te^{-t^2} dt = \frac{1}{2}$

Exercice 9

- 1) Diverge
- 2) Converge

- 3) Diverge
- 4) Converge

Exercice 10 Quitte à opérer une rotation et une translation sur ce polygone, on peut supposer que ces sommets correspondent aux racines n -ièmes de l'unité et donc que les points A_k sont d'affixe $e^{2i(k-1)\pi/n}$. Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n A_1 A_k &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left| e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 \right| = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left| e^{\frac{ik\pi}{n}} \right| \left| e^{\frac{ik\pi}{n}} - e^{-\frac{ik\pi}{n}} \right| = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left| \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right) \right| \\ &= \frac{2}{\pi} \times \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left| \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right) \right| = \frac{2}{\pi} \times \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right) \end{aligned}$$

On repère donc une somme de Riemann. La fonction

$$f : \begin{cases} [0, \pi] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto \sin(t) \end{cases}$$

est continue, on peut donc utiliser le théorème de convergence des sommes de Riemann. Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right) = \int_0^\pi \sin(t) dt = [-\cos(t)]_{t=0}^\pi = 2 .$$

La limite recherchée est donc $\boxed{\frac{4}{\pi}}$.

Exercice 11 On considère l'intégrale généralisée $I = \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt$.

- 1) Intégrer par parties $\int_{\pi/2}^M \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt$. Supposer qu'une des deux intégrales généralisées converge, et passer à la limite lorsque $M \rightarrow +\infty$. Faire de même dans « l'autre sens » pour établir la réciproque.
- 2) Montrer la convergence absolue de la seconde intégrale.

Exercice 12 Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue et décroissante, telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge.

- 1) S'il existe $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $f(x) < 0$, alors pour tout $t \geq x$, $f(t) \leq f(x) < 0$, donc $-f(t) \geq -f(x) > 0$. Or, $\int_x^{+\infty} -f(x) dt$ diverge (exemple de Riemann, paramètre $\alpha = 0$). Par comparaison d'intégrales de fonctions positives, et par linéarité, $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ diverge, ce qui est absurde. Ainsi, pour tout $x \geq 0$, $f(x) \geq 0$.
- 2) Par le théorème de limite monotone, f admet une limite ℓ en $+\infty$. Si $\ell \neq 0$, $f(x) \sim \ell$, or $\int_0^{+\infty} \ell dt$ diverge (même argument que précédemment), donc de même $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ divergerait, ce qui est absurde, donc $\ell = 0$.
- 3) $\int_{x/2}^x f(t) dt = F(x) - F(x/2) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell - \ell = 0$.
- 4) Si $\frac{x}{2} \leq t \leq x$, par décroissance et positivité de f , $0 \leq f(x) \leq f(t)$, donc

$$0 \leq \int_{x/2}^x f(x) dt \leq \int_{x/2}^x f(t) dt$$

ce qui donne

$$0 \leq \frac{x}{2} f(x) \leq \int_{x/2}^x f(t) dt.$$

Il suffit de conclure par encadrement. On obtient $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 13

- 1) F admet une limite finie ℓ en $+\infty$.
- 2) $\int_{x_n}^{y_n} f(t) \, dt = F(y_n) - F(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell - \ell = 0$.
- 3) Si $(2n+1)\pi \leq t \leq (2n+2)\pi$, alors $\sin(t) \leq 0$, donc $-t \sin(t) \geq 0$, donc $e^{-t \sin(t)} \geq 1$, donc par croissance de l'intégrale $\int_{(2n+1)\pi}^{(2n+2)\pi} e^{-t \sin(t)} \, dt \geq 1$.
- 4) $\int_0^{+\infty} e^{-t \sin(t)} \, dt$ diverge.