

Feuille d'exercices n° 00 : **Rappels d'intégration**

Exercices à préparer

Exercice 1 (Lundi 08/09) On définit pour $n \geq 1$: $I_n = \int_0^\pi e^{-nt} \sin(t) dt$ et $J_n = \int_0^\pi e^{-nt} \cos(t) dt$.

1) En réalisant deux intégrations par parties différentes, montrer les deux relations suivantes.

a) $I_n = 1 + e^{-n\pi} - nJ_n$

b) $I_n = \frac{1}{n} J_n$

2) En déduire les valeurs de I_n et de J_n .

3) Retrouver ces valeurs en utilisant les nombres complexes.

Exercice 2 (Vendredi 12/09) En faisant apparaître une somme de Riemann, déterminer un équivalent simple de $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{k}$.

Exercices élémentaires

Exercice 3 Étudier les fonctions suivantes.

1) $f : x \mapsto \frac{e^x}{x}$

2) $g : x \mapsto \frac{x}{x^2 + 1}$

Déterminer un développement limité de g à l'ordre 3 en $x = 0$. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de g en $x = 0$, et la position relative de la courbe de g par rapport à cette tangente, autour de 0.

Pour ceux qui avancent vite : même question en $x = \sqrt{3}$.

Exercice 4 Déterminer un équivalent simple pour chacune des fonctions suivantes, lorsque $x \rightarrow +\infty$.

1) $f : x \mapsto x^2 - \ln(x) + 3$

3) $h : x \mapsto \ln(x+1) - \ln(x-1)$

2) $g : x \mapsto \sqrt{x^3 - 3x + 1}$

4) $\varphi : x \mapsto x^{1/x}$

Exercice 5 Calculer une primitive de chacune des fonctions suivantes.

1) $x \mapsto \tan(x)$

3) $x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{x}}$

2) $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$

4) $x \mapsto \frac{1+x}{1+x^2}$

Exercice 6 Calculer les intégrales suivantes.

1) $\int_0^{\pi/3} \tan^2(t) dt$

2) $\int_0^3 |t^2 - 3t + 2| dt$

3) $\int_0^1 (1+t)\sqrt{t} dt$.

Exercice 7 Calculer les intégrales suivantes, en procédant par intégration par parties.

1) $\int_1^e t^2 \ln(t) dt$

3) $\int_0^1 t^3 e^{t^2} dt$

2) $\int_0^{\pi/4} \frac{t}{\cos^2(t)} dt$

4) $\int_0^1 t \sin(t) dt$

Exercice 8 Calculer les intégrales ou primitives suivantes, en posant le changement de variables suggéré.

1) $\int_{-1}^1 \frac{dt}{1+e^t}$ (poser $x = e^t$)

4) $\int \frac{1}{t \ln(t)} dt$ (poser $u = \ln(t)$)

2) $\int^x \frac{dt}{t^2+4}$ (poser $t = 2u$)

5) $\int^x \cos(\sqrt{t}) dt$ (poser $t = u^2$)

3) $\int_0^{\pi/2} \sin(t) \cos^3(t) dt$ (poser $x = \sin(t)$)

6) $\int_1^2 \frac{\ln(1+t) - \ln(t)}{t^2} dt$ (poser $x = \frac{1}{t}$)

Exercice 9 Déterminer les limites de chacune des suites définies par le terme général suivant.

1) $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2 + k^2}$

2) $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2 + k^2}$

3) $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^3 + nk^2}$

Exercices plus avancés

Exercice 10 Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue, vérifiant

$$\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 f^2(t) dt.$$

- 1) Déterminer les racines et le signe sur $[0, 1]$ de $P : x \mapsto x - x^2$.
- 2) Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$: $f(t) \in \{0, 1\}$.
- 3) En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer que la fonction f est constante.

Exercice 11 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, soit $a \in \mathbb{R}$ et $T > 0$.

- 1) Montrer que si f est paire, alors $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$.
- 2) Montrer que si f est impaire, alors $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$.
- 3) Montrer que si f est T -périodique, alors $\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt$.

Exercice 12 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

- 1) Proposer une majoration de $\left| \int_a^b f'(t) \sin(nt) dt \right|$ ne dépendant pas de n .
- 2) Montrer le lemme de Riemann-Lebesgue : $\int_a^b f(t) \cos(nt) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.