

Feuille d'exercices n° 00 : **Rappels d'intégration**

TSI 2 – MATHÉMATIQUES

Lycée Gustave Eiffel

Année 2026/2027 – Semaine du 1^{er} septembre

Exercice 1 (Lundi 08/09)

On définit pour $n \geq 1$: $I_n = \int_0^\pi e^{-nt} \sin(t) dt$ et

$$J_n = \int_0^\pi e^{-nt} \cos(t) dt.$$

1. En réalisant deux intégrations par parties différentes, montrer les deux relations suivantes.

$$1.1 \quad I_n = 1 + e^{-n\pi} - nJ_n$$

$$1.2 \quad I_n = \frac{1}{n} J_n$$

2. En déduire les valeurs de I_n et de J_n .
3. Retrouver ces valeurs en utilisant les nombres complexes.

Exercice 2 (Vendredi 12/09)

En faisant apparaître une somme de Riemann, déterminer un équivalent simple de $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{k}$.

Exercice 3

Étudier les fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto \frac{e^x}{x}$

2. $g : x \mapsto \frac{x}{x^2 + 1}$

Déterminer un développement limité de g à l'ordre 3 en $x = 0$.

Déterminer une équation de la tangente à la courbe de g en $x = 0$,
et la position relative de la courbe de g par rapport à cette
tangente, autour de 0.

Pour ceux qui avancent vite : même question en $x = \sqrt{3}$.

Exercice 4

Déterminer un équivalent simple pour chacune des fonctions suivantes, lorsque $x \rightarrow +\infty$.

1. $f : x \mapsto x^2 - \ln(x) + 3$

2. $g : x \mapsto \sqrt{x^3 - 3x + 1}$

3. $h : x \mapsto \ln(x+1) - \ln(x-1)$

4. $\varphi : x \mapsto x^{1/x}$

Exercice 5

Calculer une primitive de chacune des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \tan(x)$

2. $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$

3. $x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{x}}$

4. $x \mapsto \frac{1+x}{1+x^2}$

Exercice 6

Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_0^{\pi/3} \tan^2(t) \, dt$

2. $\int_0^3 |t^2 - 3t + 2| \, dt$

3. $\int_0^1 (1+t)\sqrt{t} \, dt.$

Exercice 7

Calculer les intégrales suivantes, en procédant par intégration par parties.

1. $\int_1^e t^2 \ln(t) dt$

2. $\int_0^{\pi/4} \frac{t}{\cos^2(t)} dt$

3. $\int_0^1 t^3 e^{t^2} dt$

4. $\int_0^1 t \sin(t) dt$

Exercice 8

Calculer les intégrales ou primitives suivantes, en posant le changement de variables suggéré.

1. $\int_{-1}^1 \frac{dt}{1+e^t}$ (poser $x = e^t$)
2. $\int^x \frac{dt}{t^2+4}$ (poser $t = 2u$)
3. $\int_0^{\pi/2} \sin(t) \cos^3(t) dt$ (poser $x = \sin(t)$)
4. $\int^x \frac{1}{t \ln(t)} dt$ (poser $u = \ln(t)$)
5. $\int^x \cos(\sqrt{t}) dt$ (poser $t = u^2$)
6. $\int_1^2 \frac{\ln(1+t) - \ln(t)}{t^2} dt$ (poser $x = \frac{1}{t}$)

Exercice 9

Déterminer les limites de chacune des suites définies par le terme général suivant.

1.
$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2 + k^2}$$

2.
$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2 + k^2}$$

3.
$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^3 + nk^2}$$

Exercice 10

Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue, vérifiant

$$\int_0^1 f(t) \, dt = \int_0^1 f^2(t) \, dt.$$

1. Déterminer les racines et le signe sur $[0, 1]$ de $P : x \mapsto x - x^2$.
2. Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$: $f(t) \in \{0, 1\}$.
3. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer que la fonction f est constante.

Exercice 11

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, soit $a \in \mathbb{R}$ et $T > 0$.

1. Montrer que si f est paire, alors $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$.
2. Montrer que si f est impaire, alors $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$.
3. Montrer que si f est T -périodique, alors $\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt$.

Exercice 12

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

1. Proposer une majoration de $\left| \int_a^b f'(t) \sin(nt) \, dt \right|$ ne dépendant pas de n .

2. Montrer le lemme de Riemann-Lebesgue :

$$\int_a^b f(t) \cos(nt) \, dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$