

Indications et éléments de correction, feuille d'exercices n° 00 (Rappels d'intégration)

Exercice 3

- 1) La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. On calcule $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	−	0	0	+
$f(x)$	0	$+\infty$	e	$+\infty$

- 2) La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et est impaire. On calcule $g'(x) = -\frac{(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$g'(x)$	−	0	+	0
$g(x)$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

On calcule $g(x) = x - x^3 + o(x^3)$, donc $g(x) - x \sim x^3$.

La tangente à la courbe de g en 0 a donc pour équation $y = x$. À gauche de 0, la courbe est au dessus de la tangente. À droite de zéro, la courbe est en dessous de la tangente.

On calcule $g(\sqrt{3}+h) = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{h}{8} + \frac{h^3}{32} + o(h^3)$, donc $g(\sqrt{3}+h) - \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{h}{8}\right) \sim \frac{h^3}{32}$.

La tangente à la courbe de g en $\sqrt{3}$ a donc pour équation $y = \frac{3}{4} - \frac{1}{8}(x - \sqrt{3})$. À gauche de 0, la courbe est en dessous de la tangente. À droite de zéro, la courbe est au dessus de la tangente.

Exercice 4

- 1) $f(x) \sim x^2$
- 2) $g(x) \sim x\sqrt{x}$
- 3) $h(x) \sim \frac{2}{x}$
- 4) $\varphi(x) \sim 1$

Exercice 5

- 1) $\int^x \tan(t) dt = -\ln |\cos(x)|$
- 2) $\int^x \frac{\ln(t)}{t} dt = \frac{1}{2} \ln^2(x)$

- 3) $\int^x \frac{1}{t\sqrt{t}} dt = -\frac{2}{\sqrt{x}}$
- 4) $\int^x \frac{1+t}{1+t^2} dt = \text{Arctan}(x) + \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$

Exercice 6

- 1) $\int_0^{\pi/3} \tan^2(t) dt = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$
- 2) $\int_0^3 |t^2 - 3t + 2| dt = \frac{11}{6}$ (découper judicieusement)
- 3) $\int_0^1 (1+t)\sqrt{t} dt = \frac{16}{15}$

Exercice 7

- 1) $\int_1^e t^2 \ln(t) dt = \frac{1+2e^3}{9}$
- 2) $\int_0^{\pi/4} \frac{t}{\cos^2(t)} dt = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}$
- 3) $\int_0^1 t^3 e^{t^2} dt = \frac{1}{2}$
- 4) $\int_0^1 t \sin(t) dt = \sin(1) - \cos(1)$

Exercice 8

- 1) $\int_{-1}^1 \frac{dt}{1+e^t} = 1$
- 2) $\int^x \frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{2} \text{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right)$
- 3) $\int_0^{\pi/2} \sin(t) \cos^3(t) dt = \frac{1}{4}$
- 4) $\int^x \frac{1}{t \ln(t)} dt = \ln |\ln(t)|$
- 5) $\int^x \cos(\sqrt{t}) dt = 2(\sqrt{x} \sin(\sqrt{x}) + \cos(\sqrt{x}))$
- 6) $\int_1^2 \frac{\ln(1+t) - \ln(t)}{t^2} dt = \frac{1}{2}(7 \ln(2) - 3 \ln(3) - 1)$

Exercice 9

- 1) $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4}$
- 2) $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2+k^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2)}{2}$
- 3) $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^3+nk^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{\pi}{4}$

Exercice 10

- 1) Factoriser.
- 2) Soustraire un des deux membres pour faire apparaître $P(f(t))$. Appliquer le théorème adapté (bien vérifier ses hypothèses) pour montrer que $P(f(t))$ est toujours nulle.
- 3) Si f n'est pas constante, montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ vérifiant $f(c) = \frac{1}{2}$.

Exercice 11

- 1) Utiliser la relation de Chasles pour découper l'intégrale en deux. Poser $x = -t$.
- 2) Idem.
- 3) Utiliser la relation de Chasles pour découper l'intégrale en deux. Poser $x = t + T$.

Sinon : poser $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, exprimer $\int_a^{a+T} f(t) dt$ à partir de F et dériver.

Exercice 12

- 1) Utiliser l'inégalité triangulaire.
- 2) Intégrer par parties.