

DEVOIR SURVEILLÉ N°2

Durée : 4 heures, calculatrices et documents interdits

Les deux problèmes qui composent ce devoir sont indépendants. Vous êtes libres de les chercher dans l'ordre de votre choix, mais vous devrez rendre ces trois problèmes dans l'ordre ($I < II$). Je vous conseille de traiter chaque problème sur une copie double séparée (voir les consignes de présentation ci-dessous).

Je vous conseille *très fortement* d'aborder chaque problème, passez au moins 75 minutes sur chacun. Dans chacun se trouvent des questions élémentaires : cherchez-les ! Vous devez les avoir toutes traitées avant la fin de l'épreuve.

Vous pouvez toujours admettre le résultat d'une question à laquelle vous n'arrivez pas à répondre. Ne restez donc pas bloqués sur une question, les résultats à utiliser étant fournis au fur et à mesure de l'énoncé. Il n'est pas raisonnable de passer plus de 10 minutes à chercher une question.

CONSIGNES DE PRÉSENTATION

- ▷ Indiquez votre nom et votre prénom sur chaque feuille.
- ▷ Vous devez obligatoirement rendre votre travail sur copies doubles.
- ▷ N'écrivez pas sur deux lignes consécutives. Aérez vos réponses et vos calculs.
- ▷ Encadrez (en couleur et à la règle) toutes vos conclusions et résultats des questions. Soulignez (toujours en couleur et à la règle) les arguments de vos réponses et les hypothèses clefs des théorèmes que vous utilisez.
- ▷ Numérotez chaque page de votre composition, en indiquant le total du nombre de pages (ex : 1/10, 2/10,..., 10/10).
- ▷ Tous les types d'effaceurs sont interdits. Composez à l'encre bleue ou noire, non effaçable.
- ▷ Écrivez **FIN** à la fin de votre composition.

I. P -systèmes de matrices.

Dans tout ce problème, on notera Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$ et I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On identifiera $\mathbb{R}^n$ à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que l'on pourra noter verticalement les n -uplets de réels.

Partie A : P -systèmes de deux matrices.

Dans $\mathbb{R}^n$, on considère deux endomorphismes f et g dont les matrices dans la base canonique sont notées A et B , respectivement. On rappelle que pour toute colonne $X \in \mathbb{R}^n$, on a

$$f(X) = AX \quad \text{et} \quad g(X) = BX.$$

On dit que (A, B) est un P -système si A et B vérifient les conditions suivantes :

- ▷ $A \neq 0$ et $B \neq 0$;
- ▷ $AB = BA = 0$;
- ▷ $A + B = I_n$.

L'objectif de cette partie est de démontrer que, s'il existe un tel P -système, alors $n \geq 2$.

1) Exemples dans le cas $n = 2$.

Dans chacun des cas suivants, déterminer si (A, B) forme un P -système.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

On revient maintenant au cas général, et l'on suppose que (A, B) est un P -système.

- 2) En multipliant la relation $A + B = I_n$ par A , montrer que f est un projecteur.
- 3) Montrer aussi que g est un projecteur.
- 4) En raisonnant par l'absurde, et en utilisant les propriétés d'un projecteur, justifier que $\text{Ker}(f - \text{Id}) \neq \{0\}$.
- 5) Soit $X \in \text{Ker}(f - \text{Id})$ et $Y \in \text{Ker}(g - \text{Id})$. On suppose que $X \neq 0$ et que $Y \neq 0$, et l'on va démontrer que la famille (X, Y) est libre.

Dans cette question uniquement, on considérera donc deux réels λ, μ vérifiant

$$\lambda X + \mu Y = 0.$$

- a) Question de cours. Démontrer que $AX = X$ et que $BY = Y$.
 - b) En écrivant $Y = BY$ dans la relation $\lambda X + \mu Y = 0$ et en multipliant (à gauche) cette relation par une matrice bien choisie, démontrer que $\lambda = 0$.
 - c) En déduire que la famille (X, Y) est libre, et démontrer que $n \geq 2$.
- 6) Illustration des questions 2) et 3).

On reprend l'exemple 1)b), on a donc $A = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) Déterminer les éléments caractéristiques de f et de g .
- b) En déduire la nature géométrique précise de f et de g .

Partie B : P -systèmes de trois matrices.

Dans $\mathbb{R}^n$, on considère trois endomorphismes f , g et h dont les matrices dans la base canonique sont notées A , B et C , respectivement. On rappelle que pour toute colonne $X \in \mathbb{R}^n$, on a

$$f(X) = AX, \quad g(X) = BX \quad \text{et} \quad h(X) = CX.$$

On dit que (A, B, C) est un P -système si A , B et C vérifient les conditions suivantes :

- ▷ $A \neq 0$, $B \neq 0$ et $C \neq 0$;
- ▷ $AB = BA = AC = CA = BC = CB = 0$;
- ▷ $A + B + C = I_n$.

L'objectif de cette partie est de démontrer que, s'il existe un tel P -système, alors $n \geq 3$.

7) Démontrer que f , g et h sont des projecteurs.

8) Justifier qu'il existe $X \in \mathbb{R}^n$ non nul vérifiant $AX = X$.

On a donc immédiatement, par symétrie du problème, qu'il existe $Y, Z \in \mathbb{R}^n$ tous les deux non nuls et tels que $BY = Y$ et $CZ = Z$.

9) On considère de tels X, Y, Z . Démontrer que la famille (X, Y, Z) est libre.

10) En déduire que $n \geq 3$.

Partie C : un exemple de P -système de trois matrices, en dimension 3.

Dans cette partie, on considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

On suppose qu'il existe un P -système (A, B, C) vérifiant

$$M = A + 2B - C.$$

On rappelle que A, B, C sont des matrices carrées de taille 3 qui vérifient les relations suivantes :

- ▷ $A + B + C = I_3$;
- ▷ $AB = BA = AC = CA = BC = CB = 0$;
- ▷ $A^2 = A$, $B^2 = B$, $C^2 = C$.

On notera m , f , g et h les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique sont M , A , B et C , respectivement. Pour toute colonne $X \in \mathbb{R}^3$, on a donc

$$m(X) = MX, \quad f(X) = AX, \quad g(X) = BX \quad \text{et} \quad h(X) = CX.$$

11) Montrer que $M^2 = A + 4B + C$.

12) En utilisant aussi les relations $M = A + 2B - C$ et $I_3 = A + B + C$, en déduire des expressions de A, B, C en fonction de M^2 , M et I_3 .

Indication : on écrira un système dont les variables sont A, B, C .

13) Calculer M^2 .

14) Vérifier que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

15) Vérifier que $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une base de $\text{Ker}(f - \text{Id})$.

16) On admet que $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base de $\text{Ker}(g - \text{Id})$ et que $Z = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base de $\text{Ker}(h - \text{Id})$.

Démontrer que $\mathcal{B} = (X, Y, Z)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

17) Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(m)$. Qu'a de particulier cette matrice ?

II. Stratégies sur une suite de tirages aléatoires.

Partie I : un seul tirage.

On considère le lancer d'un dé à six faces équilibré, dont les faces sont numérotées de un à six. On note X la variable aléatoire correspondant au numéro tiré.

18) Donner le nom de la loi de X , et son paramètre. Détailler sa loi.

19) Redémontrer (en détaillant la définition et le calcul) le fait que $\mathbf{E}(X) = \frac{7}{2}$.

Partie II : deux tirages.

On lance maintenant deux fois le dé à six faces, ce qui donne deux résultats, notés X_1 et X_2 , que l'on ne regarde pas immédiatement.

On commence par observer le résultat du second lancer, X_2 . En fonction uniquement de X_2 :

▷ on peut choisir de conserver ce résultat et de s'arrêter, le résultat final est alors $Y = X_2$;

▷ on peut choisir de prendre le résultat du premier lancer, le résultat final est alors $Y = X_1$.

Nous allons maintenant étudier deux stratégies, en fonction de X_2 , l'objectif général étant d'obtenir la valeur moyenne de Y la plus élevée possible.

Partie II.A : stratégie gloutonne.

Dans cette sous-partie uniquement, on conserve le second lancer s'il donne six. Ainsi, si $X_2 = 6$, alors $Y = X_2$, sinon $Y = X_1$.

20) Donner l'ensemble des valeurs prises par Y .

21) Justifier que les événements $(X_2 < 6)$ et $(X_2 = 6)$ forment un système complet d'événement, et donner les valeurs des probabilités $\mathbf{P}(X_2 < 6)$ et $\mathbf{P}(X_2 = 6)$.

22) Quelle est la loi de probabilité de Y conditionnellement à l'événement $(X_2 < 6)$? Et conditionnellement à l'événement $(X_2 = 6)$?

Traduire ceci en termes de valeurs de probabilités conditionnelles.

23) Pour $1 \leq i \leq 5$, justifier que $\mathbf{P}((Y = i) \cap (X_2 < 6)) = \frac{5}{36}$. Quelle est la valeur de $\mathbf{P}((Y = i) \cap (X_2 = 6))$?

24) Dédurre de la question précédente la valeur de $\mathbf{P}([Y = i])$ pour chaque $1 \leq i \leq 5$. Quelle est la valeur de $\mathbf{P}(Y = 6)$?

25) Montrer que $\mathbf{E}(Y) = \frac{47}{12}$.

Partie II.B : une deuxième stratégie.

Dans cette sous-partie uniquement, on conserve le premier lancer uniquement s'il donne quatre, cinq ou six. Ainsi, si $4 \leq X_2 \leq 6$, alors $Y = X_2$, sinon $Y = X_1$. Nous montrerons dans la partie suivante que cette stratégie est optimale.

On pourra utiliser sans justification que $(X_2 \leq 3)$ et $(X_2 \geq 4)$ forment un système complet d'événement.

26) Donner les valeurs de $\mathbf{P}(X_2 \leq 3)$ et de $\mathbf{P}(X_2 \geq 4)$.

- 27) Pour $1 \leq i \leq 6$, justifier que $\mathbf{P}((Y = i) \cap (X_2 \leq 3)) = \frac{1}{12}$.
- 28) Pour $4 \leq i \leq 6$, justifier que $\mathbf{P}((Y = i) \cap (X_2 \geq 4)) = \frac{1}{6}$. Que vaut cette probabilité si $1 \leq i \leq 3$?
- 29) Montrer que $\mathbf{E}(Y) = \frac{17}{4}$.
- 30) Comparer l'espérance de Y calculée dans cette sous-partie à celle calculée en **II.A**. Qu'en déduisez-vous ?

Partie III : cas général.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance maintenant n fois le dé à six faces. Le résultat du k^{e} lancer est noté X_k . Comme précédemment, on n'observe que le résultat du dernier lancer, X_n . En fonction du résultat X_n :

- ▷ on peut décider de s'arrêter, ce qui donne pour résultat final $Y_n = X_n$;
- ▷ ou bien de considérer le tirage précédent, ce qui donne $Y_n = Y_{n-1}$.

Lorsque l'on arrive au premier tirage, on se doit de le conserver : on a alors $Y_1 = X_1$.

L'objectif de cette partie est de déterminer une stratégie permettant de maximiser l'espérance de Y_n .

Partie III.A : stratégie gloutonne.

Dans cette sous-partie, on ne s'arrête que si l'on obtient un six (ou bien, si l'on arrive au dernier tirage). Ainsi :

- ▷ $Y_1 = X_1$;
- ▷ si $n \geq 2$ et si $X_n = 6$, alors $Y_n = X_n = 6$;
- ▷ si $n \geq 2$ et si $X_n \neq 6$, alors $Y_n = Y_{n-1}$.

On notera S_{n-1} l'événement « on obtient au moins un six lors des $n - 1$ derniers tirages ».

- 31) Écrire les événements S_{n-1} et $\overline{S_{n-1}}$ à partir des événements $[X_k = 6]$ et $[X_k \neq 6]$, pour $1 \leq k \leq 6$.
- 32) Justifier que $\mathbf{P}(S_{n-1}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$.
- 33) Déterminer la loi de Y_n .
- 34) Déterminer l'existence et la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(Y_n = 6)$. Commenter ce résultat.
- 35) Calculer $\mathbf{E}(Y_n)$ et sa limite lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Partie III.B : résultat intermédiaire.

On considère maintenant un premier lancer de dé X et un entier $1 \leq k < 6$. On considère la règle suivante.

- ▷ Si $X > k$, alors on conserve ce lancer, et l'on a $Y = X$.
- ▷ Sinon, on réalise un tirage d'une variable aléatoire Z , indépendante de X , qui ne suit pas nécessairement la loi uniforme, d'espérance $e \in [1, 6]$, et l'on a $Y = Z$.

36) Justifier que, pour $1 \leq i \leq 6$,

$$\mathbf{P}(Y = i) = \begin{cases} \frac{k}{6} \mathbf{P}(Z = i) & \text{si } i \leq k. \\ \frac{1}{6} + \frac{k}{6} \mathbf{P}(Z = i) & \text{si } i > k. \end{cases}$$

37) Démontrer que

$$\mathbf{E}(Y) = e + \frac{1}{6} \sum_{i=k+1}^6 (i - e).$$

38) En déduire que $\mathbf{E}(Y)$ est maximale lorsque k est la partie entière de e .

On admet dans la suite que cette situation est optimale : il n'y a pas de choix de valeurs pour X qui puisse donner une espérance strictement supérieure pour Y .

39) À la lumière de ce résultat, commenter l'énoncé de la partie **II.B**.

Partie III.C : stratégie optimale.

On considère maintenant la stratégie suivante, qui est une idée de programmation dynamique : si $n \geq 2$, on note e_{n-1} l'espérance maximale que l'on puisse obtenir lors des $n - 1$ premiers tirages, et l'on procède de la manière suivante.

▷ Si $X_n > e_{n-1}$, alors on s'arrête et $Y_n = X_n$.

▷ Si $X_n \leq e_{n-1}$, Y_n est le résultat obtenu dans les tirages précédents, soit $Y_n = Y_{n-1}$.

Comme précédemment, $Y_1 = X_1$.

40) Justifier les égalités suivantes :

- ▷ si $3 \leq e_{n-1} < 4$, alors $e_n = \frac{1}{2}e_{n-1} + \frac{5}{2}$,
- ▷ si $4 \leq e_{n-1} < 5$, alors $e_n = \frac{2}{3}e_{n-1} + \frac{11}{6}$,
- ▷ si $5 \leq e_{n-1} < 6$, alors $e_n = \frac{5}{6}e_{n-1} + 1$.

41) Que vaut e_1 ? Calculer les valeurs de e_2 , de e_3 , de e_4 , puis vérifier que $e_5 = \frac{277}{54}$ et que $e_5 \in [5, 6[$.

Indication : on prendra soin de simplifier les fractions manipulées.

On a donc, pour tout $n \geq 5$,

$$e_{n+1} = \frac{5}{6}e_n + 1.$$

42) Démontrer que, pour tout $n \geq 5$, $e_n \in [5, 6[$.

43) Déterminer un réel ℓ solution de l'équation $\ell = \frac{5}{6}\ell + 1$ et vérifier que la suite de terme général $u_n = e_n - \ell$ est géométrique à partir du rang 5. Quelle est la raison de cette suite ?

44) Donner une expression de e_n en fonction de n , ℓ et e_5 , pour $n \geq 1$.

45) Déterminer la limite de e_n lorsque $n \rightarrow +\infty$. Commenter ce résultat.

— FIN —