

DEVOIR SURVEILLÉ N°1

Durée : 4 heures, calculatrices et documents interdits

Les trois problèmes qui composent ce devoir sont indépendants. Vous êtes libres de les chercher dans l'ordre de votre choix, mais vous devrez rendre ces trois problèmes dans l'ordre ($I < II < III$). Je vous conseille de traiter chaque problème sur une copie double séparée (voir les consignes de présentation ci-dessous).

Je vous conseille *très fortement* d'aborder chaque problème, passez au moins 45 minutes sur chacun. Dans chacun se trouvent des questions élémentaires : cherchez-les ! Vous devez les avoir toutes traitées avant la fin de l'épreuve.

Vous pouvez toujours admettre le résultat d'une question à laquelle vous n'arrivez pas à répondre. Ne restez donc pas bloqués sur une question, les résultats à utiliser étant fournis au fur et à mesure de l'énoncé. Il n'est pas raisonnable de passer plus de 10 minutes à chercher une question.

CONSIGNES DE PRÉSENTATION

- ▷ Indiquez votre nom et votre prénom sur chaque feuille.
- ▷ Vous devez obligatoirement rendre votre travail sur copies doubles.
- ▷ N'écrivez pas sur deux lignes consécutives. Aérez vos réponses et vos calculs.
- ▷ Encadrez (en couleur et à la règle) toutes vos conclusions et résultats des questions. Soulignez (toujours en couleur et à la règle) les arguments de vos réponses et les hypothèses clefs des théorèmes que vous utilisez.
- ▷ Numérotez chaque page de votre composition, en indiquant le total du nombre de pages (ex : 1/10, 2/10,..., 10/10).
- ▷ Tous les types d'effaceurs sont interdits. Composez à l'encre bleue ou noire, non effaçable.
- ▷ Écrivez **FIN** à la fin de votre composition.

I. Étude d'une suite d'intégrales.

Partie A - Entre 0 et 1.

On considère, pour tout entier naturel n , l'application f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = (1-x)^n e^{-2x},$$

ainsi que l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} dx.$$

On se propose de déterminer un développement asymptotique de I_n de la forme

$$I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

- 1) Calculer I_0 .
- 2) En procédant par intégration par parties, démontrer que $I_1 = \frac{1 + e^{-2}}{4}$.
- 3) Soit $x \in [0, 1]$, donner une expression factorisée de $f_n(x) - f_{n+1}(x)$, et en déduire le signe de $f_n(x) - f_{n+1}(x)$.
- 4) En déduire le sens de variations de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- 5) Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer le signe de I_n .
- 6) En citant précisément le théorème utilisé, en déduire que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
- 7) Soit $n \in \mathbb{N}$. En posant le changement de variable $u = 1 - t$, démontrer que

$$\int_0^1 (1-t)^n dt = \int_0^1 u^n du,$$

et calculer la valeur de cette intégrale.

- 8) Donner les variations sur $[0, 1]$ de la fonction $x \mapsto e^{-2x}$, et en déduire un majorant de cette fonction sur $[0, 1]$.
- 9) En utilisant les deux questions précédentes, démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

- 10) En déduire la valeur de la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- 11) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n.$$

- 12) En déduire que $nI_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. En déduire un premier développement asymptotique de la forme

$$I_n = a + \frac{b}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

- 13) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n(nI_n - 1) = -\frac{n}{n+1}(1 + 2nI_{n+1})$$

14) En reprenant la méthode précédente, conclure au développement asymptotique demandé.

Partie B - Entre 1 et $+\infty$.

15) Soit $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la limite de $|x^2(1-x)^n e^{-2x}|$, lorsque $x \rightarrow +\infty$?

16) En déduire la nature de $\int_1^{+\infty} (1-x)^n e^{-2x} dx$.

17) Calculer la valeur de $\int_1^{+\infty} e^{-2x} dx$.

18) En procédant par intégration par parties, démontrer que $\int_1^{+\infty} (1-x) e^{-2x} dx = -\frac{1}{4e^2}$.

II. Étude d'une transformation matricielle.

On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels, et l'on considère les matrices

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On considère enfin les ensembles

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a = d \text{ et } b = c \right\},$$
$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a + d = 0 \text{ et } b + c = 0 \right\},$$

Partie A - Étude de deux sous-espaces vectoriels

19) Déterminer respectivement si I , J , K et L appartiennent à F , puis à G .

20) Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On admet de même que G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

21) Démontrer que (I, J) est une base de F et que (K, L) est une base de G .

22) Justifier que $F \cap G = \{0\}$.

23) En déduire que F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

24) Démontrer que (I, J, K, L) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Partie B - Étude d'une transformation

On considère l'application φ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans lui-même qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, associe la matrice

$$\varphi(M) = JMJ.$$

Attention : le résultat de la question suivante, bien que simple, est fondamental pour la suite du problème. Je vous suggère très fortement de vérifier votre calcul.

25) Calculer J^2 . En déduire sans plus de calcul que la matrice J est inversible, et exprimer J^{-1} .

26) Montrer que l'application φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

27) En utilisant notamment le résultat de la question 25), montrer que φ est un automorphisme (c'est-à-dire, un endomorphisme bijectif) de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et exprimer l'automorphisme réciproque φ^{-1} .

28) Montrer que si M et N sont deux éléments quelconques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a $\varphi(MN) = \varphi(M)\varphi(N)$.

29) Calculer les matrices $\varphi(I)$, $\varphi(J)$, $\varphi(K)$ et $\varphi(L)$.

30) En déduire la matrice représentant φ dans la base (I, J, K, L) .

31) Démontrer que

$$F = \{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \varphi(M) = M \},$$
$$G = \{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \varphi(M) = -M \}.$$

- 32)** Montrer que le produit de deux matrices appartenant à F appartient aussi à F . Que peut-on dire du produit de deux éléments de G ?
- 33)** Pour $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on sait qu'il existe $M_+ \in F$ et $M_- \in G$ uniques vérifiant $M = M_+ + M_-$. Pour deux matrices M et N de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, exprimer $(MN)_+$ et $(MN)_-$ en fonction de M_+ , M_- , N_+ , N_- .

III. Le théorème de Napoléon.

Dans cet exercice, on note $\omega = e^{2i\pi/3}$.

On définit la fonction $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ par

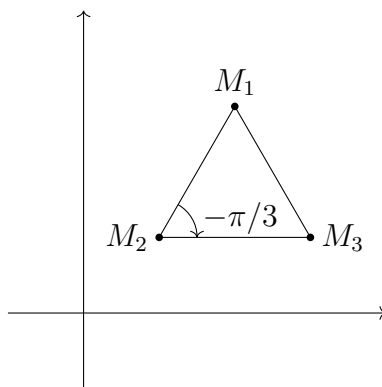
$$\forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3, \quad f(z_1, z_2, z_3) = z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3$$

Partie A - Analyse complexe

- 34) a) Justifier que $\omega^3 = 1$.
b) Développer le produit $(1 - \omega)(1 + \omega + \omega^2)$ et en déduire que $f(1, 1, 1) = 0$.
c) Démontrer que $f(1, \omega, \omega^2) = 0$. Calculer la valeur de $f(1, \omega^2, \omega)$.
- 35) a) Donner le module et un argument du nombre complexe $-\omega$.
b) Démontrer que $1 - \omega = -2i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) e^{i\pi/3}$. *Indication* : on pourra factoriser par $e^{i\pi/3}$.
En déduire le module du nombre complexe $1 - \omega$.
- 36) La fonction f est-elle une application linéaire (on pourra considérer $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, au choix) ?

Partie B - Triangles équilatéraux

On munit le plan usuel d'un repère orthonormé direct et on identifie les points du plan à leur affixe complexe. Étant donné trois points M_1, M_2 et M_3 deux à deux distincts, on dit que le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral direct lorsque $M_2M_1 = M_2M_3$ et la mesure de l'angle orienté $\widehat{M_1M_2M_3}$ vaut $-\pi/3$. La figure suivante montre un exemple de triangle équilatéral direct.



Soit M_1, M_2 et M_3 trois points deux à deux distincts, dont on note z_1, z_2 et z_3 les affixes respectives.

- 37) Montrer que $M_1M_2M_3$ est équilatéral direct si et seulement si $\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} = -\omega$.
- 38) En déduire que le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral direct si et seulement si

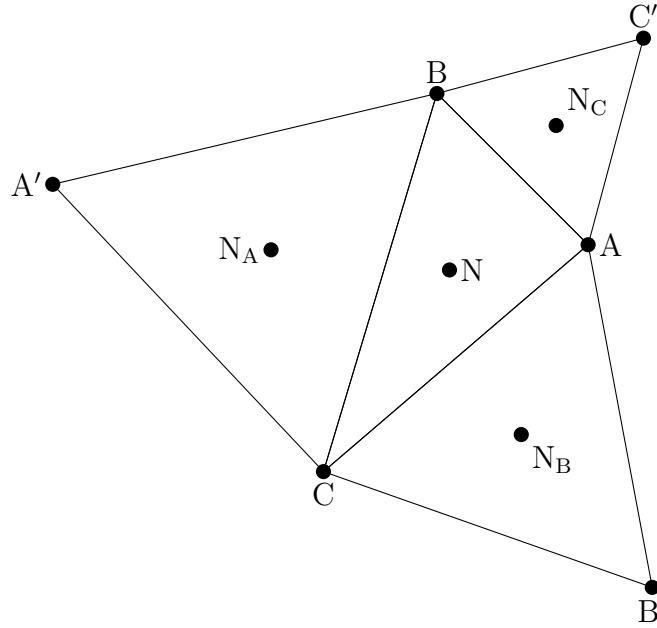
$$f(z_1, z_2, z_3) = 0.$$

Partie C - Un résultat géométrique

On donne la définition suivante : étant donné un triangle quelconque $M_1M_2M_3$ du plan complexe, dont les sommets M_1, M_2 et M_3 ont pour affixes z_1, z_2 et z_3 , on appelle centre de gravité de $M_1M_2M_3$ le point d'affixe

$$\frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}.$$

Pour la suite du problème, on place dans la configuration suivante. On fixe trois points A, B et C deux à deux distincts du plan complexe. On construit les points A', B' et C' tels que les triangles $A'CB, B'AC$ et $C'BA$ sont équilatéraux directs. On appelle N, N_A, N_B, N_C les centres de gravité des triangles $ABC, A'CB, B'AC$ et $C'BA$. On notera $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', z_N, z_{N_A}, z_{N_B}$ et z_{N_C} les affixes respectives des points $A, B, C, A', B', C', N, N_A, N_B$ et N_C .



- 39)** En utilisant la question précédente, démontrer que $\alpha' = -\gamma\omega - \beta\omega^2$. Exprimer de même β' et γ' en fonction α, β, γ et ω .
- 40)** On pose $\delta = \alpha + \omega\gamma + \omega^2\beta$.
- a) Montrer que $z_{N_B} - z_N = -\frac{\omega\delta}{3}$.
- b) Exprimer de même $z_{N_C} - z_N$ et $z_{N_A} - z_N$ en fonction de ω et δ .
- 41)** En déduire que le triangle $N_A N_B N_C$ est équilatéral direct.
- 42)** Exprimer la longueur $N_A N_B$ en fonction de $|\delta|$.

— FIN —