

Devoir à la maison n° 5

À rendre le 16 novembre

I. La constante d'Euler

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

On pose enfin $u_n = H_n - \ln(n)$ et $v_n = u_{n+1} - u_n$.

- 1) Donner (en le justifiant brièvement) la limite de H_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.
- 2) En procédant par comparaison série-intégrale, donner (et justifier) un encadrement de $\frac{1}{k}$ pour chaque $k \geq 2$.
- 3) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$1 + \ln(n) - \ln(2) \leq H_n \leq \ln(n) + 1.$$

- 4) En revenant à la définition d'un équivalent, démontrer que $H_n \sim \ln(n)$.
- 5) Donner une expression simplifiée de $H_{n+1} - H_n$ et en déduire que, pour tout $n \geq 1$:

$$v_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right).$$

- 6) En utilisant le développement limité à l'ordre 2 et en 0 de $\ln(1+u)$, en déduire que $v_n \sim -\frac{1}{2n^2}$, puis la nature de la série $\sum v_n$.
- 7) En procédant par simplification télescopique, écrire u_n en fonction de $\sum_{k=1}^n v_k$.
- 8) En déduire qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

Remarque culturelle : ce nombre γ est appelé *constante d'Euler*. Il joue un rôle important en mathématiques, mais toutes ses propriétés sont loin d'être connues. Notamment, on ignore encore si γ est, ou n'est pas, un nombre rationnel ! On peut montrer assez facilement que $\gamma \in]0, 1[$. Ses autres propriétés sont bien plus ardues à établir !

Facultatif : développement en série du nombre e

On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx.$$

- 9) Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive et décroissante. Qu'en déduit-on ?
- 10) Soit $n \in \mathbb{N}$. En construisant un encadrement pertinent de $x^n e^{-x}$, valide pour tout $x \in [0, 1]$, démontrer que

$$\frac{1}{e(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

Qu'en déduit-on sur la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

- 11) En procédant par intégration par parties, obtenir une relation de récurrence entre u_n et u_{n+1} .
- 12) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{n!}{e} \left(e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right). \quad (1)$$

- 13) En déduire que la série $\sum \frac{1}{k!}$ converge, que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$ et que $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e + o\left(\frac{1}{n!}\right)$.
- 14) En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral (que vous réviserez) à la fonction exponentielle entre 0 et 1, retrouver la formule (1).
- 15) Déterminer les natures des séries suivantes.

$$\triangleright \sum u_n$$

$$\triangleright \sum \frac{u_n}{n}$$

$$\triangleright \sum (-1)^n u_n$$

— FIN —