

Devoir à la maison n° 4

À rendre le 2 novembre

I. Tirages dans une urne aléatoire

On considère $r + 1$ urnes, notées $U_0, \dots, U_r$. Pour $j \in \llbracket 0, r \rrbracket$, l'urne U_j contient j boules noires et $r - j$ boules blanches.

On choisit une urne « au hasard », en notant J le numéro de l'urne choisie, et l'on effectue n tirages successifs avec remise dans cette urne. On note X le nombre de boules noires ainsi tirées.

On définit enfin pour chaque $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$I_k = \int_0^1 x^k (1 - x)^{n-k} dx.$$

- 1) Quelle est la loi de J ?
- 2) Dans quel ensemble la variable aléatoire X prend-elle ses valeurs ?
- 3) Soit $j \in \llbracket 0, r \rrbracket$. Conditionnellement à l'événement $[J = j]$, *i.e.* si l'on sait que les tirages se réalisent dans la j^{e} urne, quelle est la loi de X (c'est une loi usuelle : on la nommera et on donnera ses paramètres, en justifiant ceci par le repérage d'un schéma vu en cours) ?
- 4) En déduire la loi jointe du couple (J, X) .
- 5) Montrer que la loi de X est déterminée par la relation :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{r + 1} \sum_{j=0}^r \binom{n}{k} \left(\frac{j}{r}\right)^k \left(\frac{r-j}{r}\right)^{n-k}.$$

- 6) *Question facultative* : calculer $\mathbf{E}(X)$.
- 7) Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$\mathbf{P}(X = k) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} \binom{n}{k} I_k.$$

- 8) Calculer I_0 et montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$I_{k+1} = \frac{k+1}{n-k} I_k$$

On pourra procéder par intégration par parties.

- 9) En déduire la valeur de I_k , pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Indication : calculer $\frac{I_1}{n+1}, \frac{I_2}{n+1}, \frac{I_3}{n+1}$ ainsi que $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}$ et $\binom{n}{3}$ pour avoir une idée de la formule à établir.

II. Étude d'un déterminant 4×4

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on considère la matrice

$$M(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & -y & 1-2y \\ x^2 & y^2 & y^2 & (1-2y)^2 \\ x^3 & y^3 & -y^3 & (1-2y)^3 \end{pmatrix}.$$

On considère un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 10) Calculer $\det(M(x, y))$. On présentera le résultat sous forme factorisée.

On commencera par effectuer, dans cet ordre, les opérations $L_4 \leftarrow L_4 - xL_3$, puis $L_3 \leftarrow L_3 - xL_2$ et enfin $L_2 \leftarrow L_2 - xL_1$. On pourra ensuite procéder à un développement par rapport à une colonne judicieusement choisie.

- 11) Montrer que l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) sont telles que $M(x, y)$ n'est pas inversible est la réunion de six droites, dont on donnera des équations.
- 12) Parmi ces six droites, trois ne sont ni parallèles à l'axe $(O\vec{i})$, ni parallèles à l'axe $(O\vec{j})$: lesquelles ?
- 13) Vérifier que les trois droites déterminées à la questions précédente forment un triangle, et déterminer les coordonnées des sommets de ce triangle.
- 14) En calculant un déterminant, déterminer l'aire de ce triangle. Vérifier que ce triangle est un triangle rectangle.
- 15) À partir des six droites obtenues à la question 11), on forme des triangles en prenant, parmi ces six droites, trois droites qui ne sont pas deux à deux parallèles (on compte quand même les situations où les trois droites choisies sont concourantes, et donnent un triangle dégénéré, réduit à un point).
Combien de triangles peut-on ainsi former ?
- 16) Représenter les six droites obtenues à la question 11), ainsi que le triangle déterminé à la question 13).

— FIN —