

Devoir à la maison n° 3

À rendre le 5 octobre

Dans tout ce problème, on pourra identifier $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire que l'on pourra noter verticalement les triplets de nombres réels.

On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dont la matrice dans la base canonique est M .

On note I_3 la matrice identité de taille 3×3 et l'on définit les matrices

$$P = \frac{1}{9}(M + 3I_3) \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{9}(6I_3 - M).$$

On note p et q les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique sont P et Q , respectivement. On notera aussi Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.

Ainsi, pour tout vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

$$f(X) = MX, \quad p(X) = PX \quad \text{et} \quad q(X) = QX.$$

Enfin, on définit le polynôme $A(X) = X^2 - 3X - 18$.

- 1) Factoriser le polynôme A dans $\mathbb{R}[X]$.
- 2) Vérifier que M est une matrice symétrique.
- 3) Vérifier que A est un polynôme annulateur de M .
Pour les 5/2 : que sait-on sur f ?
- 4) En déduire une expression de M^2 en fonction de M et de I_3 . En déduire aussi que M est inversible et une expression de M^{-1} en fonction de M et de I_3 .
- 5) En procédant par calcul matriciel littéral uniquement (*i.e.* sans écrire les coefficients), montrer que P et Q sont des matrices symétriques et que p et q sont des projecteurs.
- 6) En procédant par calcul matriciel littéral uniquement, montrer que $PQ = QP$.
Que vaut ce produit ? Montrer aussi que $P + Q = I_3$.
- 7) Montrer que $p - q$ est une symétrie.
- 8) En utilisant les définitions de P et de Q données précédemment, déterminer deux réels α et β vérifiant $M = \alpha P + \beta Q$.

- 9) En considérant les équations associées, montrer que $\text{Ker}(p) = \text{Ker}(f + 3\text{Id})$ et que $\text{Ker}(p - \text{Id}) = \text{Ker}(f - 6\text{Id})$.
- 10) Justifier que les éléments de $\text{Ker}(p)$ sont exactement les vecteurs colonne X vérifiant l'équation $MX = -3X$. Que peut-on dire pour $\text{Ker}(p - \text{Id})$?
- 11) Déterminer les éléments caractéristiques de p (on les écrira comme des sous-espaces vectoriels engendrés par des familles de vecteurs).
En exploitant la relation $P + Q = I_3$, déterminer sans plus de calculs ceux de q .
- 12) Déterminer une base de $\text{Ker}(p)$ et une base de $\text{Ker}(p - \text{Id})$.
- 13) En déduire une base dans laquelle la matrice de f est diagonale. Quels sont ses trois coefficients diagonaux ?
- 14) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = \alpha^n P + \beta^n Q$.
- 15) Vérifier que la relation précédente est toujours vraie pour $n = -1$.
- 16) Démontrer que la relation précédente est toujours vraie pour les entiers strictement négatifs.

— FIN —