

Devoir à la maison n° 2

À rendre le 21 septembre

On admet le résultat suivant :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n(u) du \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \quad (*)$$

- 1) Quelle est la limite de $t^2 e^{-t^2}$ lorsque $t \rightarrow +\infty$?
- 2) En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge.
- 3) Montrer que pour tout $x > -1$: $\ln(1+x) \leq x$.
- 4) Soit $n \geq 1$ et $t \in [0, \sqrt{n}]$.
 - a) En considérant $x = -\frac{t^2}{n}$, déduire de la question précédente que lorsque $t < \sqrt{n}$,

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2}.$$

Cette inégalité est-elle toujours vraie pour $t = \sqrt{n}$?

- b) Démontrer de même que $e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$
- 5) En déduire que
$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt.$$
- 6) En posant le changement de variables $t = \sqrt{n} \cos(u)$, montrer que
$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(u) du.$$
- 7) En utilisant le résultat donné en (*), déterminer un équivalent simple de $\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(u) du$ puis en déduire que

$$\sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(u) du \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

On admet que l'on puisse obtenir par un autre changement de variables

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2}(u) du$$

et que l'on puisse en déduire de même que

$$\sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2}(u) du \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

8) En déduire la valeur suivante (appelée *intégrale de Gauss*) :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

— **FIN** —