

Devoir à la maison n° 1

À rendre le 7 septembre

I. Étude d'une fonction

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{(x+1)^2}{e^x - 1}$.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f , que l'on notera $\mathcal{D}$, et justifier que f est dérivable sur $\mathcal{D}$.
- 2) Pour tout $x \in \mathcal{D}$, vérifier que $f'(x)$ peut s'écrire sous la forme

$$f'(x) = (x+1) \frac{g(x)}{(e^x - 1)^2},$$

où g est une fonction que l'on déterminera.

- 3) Dresser le tableau des variations de g , et en déduire celui des variations de f .
- 4) Tracer à main levée l'allure de la courbe de f . On fera apparaître toutes les droites remarquables (asymptote, tangente horizontale).

II. Algèbre linéaire

Soit φ définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par

$$\varphi : P \mapsto (X^2 + 2)P'' + (X + 1)P' + P$$

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}_2[X]$.

- 1) Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
- 2) Déterminer la matrice de φ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
- 3) Résoudre l'équation $\varphi(P) = 5P$ puis déterminer $\text{Ker}(5\text{Id} - \varphi)$ (on trouvera un polynôme P tel que $\text{Ker}(5\text{Id} - \varphi) = \text{Vect}(P)$).
- 4) Calculer $\varphi(1)$ et $\varphi(X + 1)$.
- 5) Montrer que $\mathcal{B}' = (1, X + 1, P)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
- 6) Que dire de $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$?

III. Probabilités

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une urne, dans laquelle sont disposées n boules, numérotées de 1 à n . On tire une de ces boules au hasard, et l'on note X le numéro de la boule tirée. On considère ensuite une deuxième urne, dans laquelle on place X jetons portant le numéro 1, et $n - X$ jetons portant le numéro 0. On tire un de ces jetons et l'on note Y le numéro du jeton tiré.

- 1) Déterminer la loi de X (détailler la loi).
- 2) Soit $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, décrire le contenu de la deuxième urne lorsque l'on a $X = k$, et en déduire les valeurs des probabilités conditionnelles $P_{(X=k)}(Y = 1)$ et $P_{(X=k)}(Y = 0)$.
- 3) En appliquant la formule des probabilités totales, calculer $P(Y = 1)$. Quelle est la loi de Y ?
- 4) Les événements $(X = 1)$ et $(Y = 1)$ sont-ils indépendants ? On discutera selon les valeurs de n .

— FIN —