

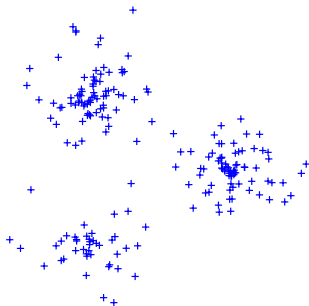
VII – Algorithme des K moyennes

M. Solnon

PT, Lycée Gustave Eiffel, Dijon

6 octobre 2026

Notre exemple



Objectif qualitatif

Répartir automatiquement ces données en K paquets
« homogènes » (ici : $K = 3$)

Généralités (1)

Échantillon

$$x_0, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}^d$$

Apprentissage non supervisé

→ données non étiquetées

Centroïde / isobarycentre / moyenne

Si $G \subset \llbracket 0, n \rrbracket$ est non vide :

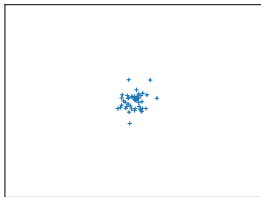
$$\mu_G = \frac{1}{\text{Card}(G)} \sum_{i \in G} x_i$$

Généralités (2)

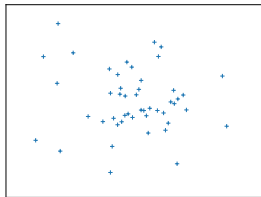
Variance intra-classe

Si $G \subset \llbracket 0, n \rrbracket$ est non vide :

$$V(G) = \frac{1}{\text{Card}(G)} \sum_{j \in G} \|x_j - \mu_G\|^2$$



(a) Variance σ



(b) Variance 25σ

Généralités (3)

Objectif quantitatif

Déterminer une partition $G_0, \dots, G_{K-1}$ de $\llbracket 0, n \rrbracket$ minimisant

$$\sum_{i=0}^{K-1} \text{Card}(G_i) V(G_i) = \sum_{i=0}^{K-1} \sum_{j \in G_i} \|x_j - \mu_i\|^2,$$

Description

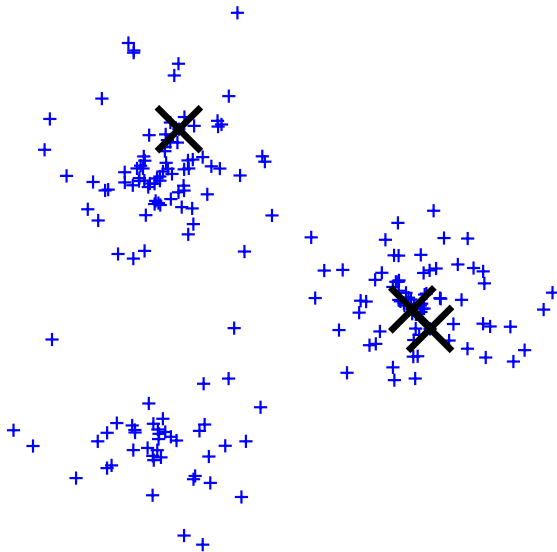
Étape d'initialisation : choisir des centroïdes $\mu_0^0, \dots, \mu_{K-1}^0$ (par exemple : au hasard parmi les données).

Pour chaque $p \geq 0$:

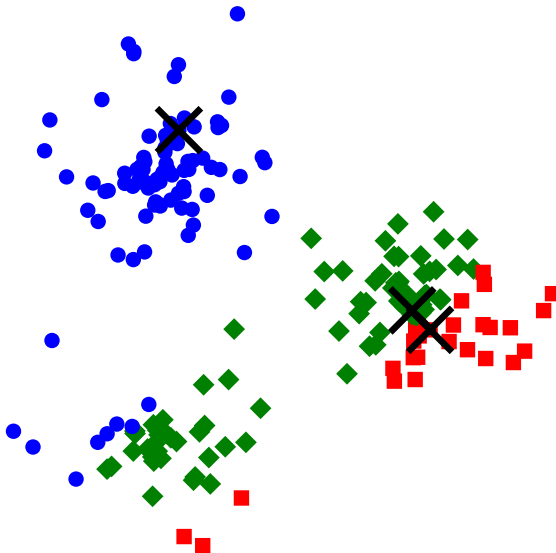
Étape d'affectation : affecter chaque vecteur x_j au centroïde le plus proche, ce qui donne des nouvelles classes $G_0^{p+1}, \dots, G_{K-1}^{p+1}$.

Étape de mise à jour : calculer les centroïdes $\mu_0^{p+1}, \dots, \mu_{K-1}^{p+1}$ de ces nouvelles classes $G_0^{p+1}, \dots, G_{K-1}^{p+1}$.

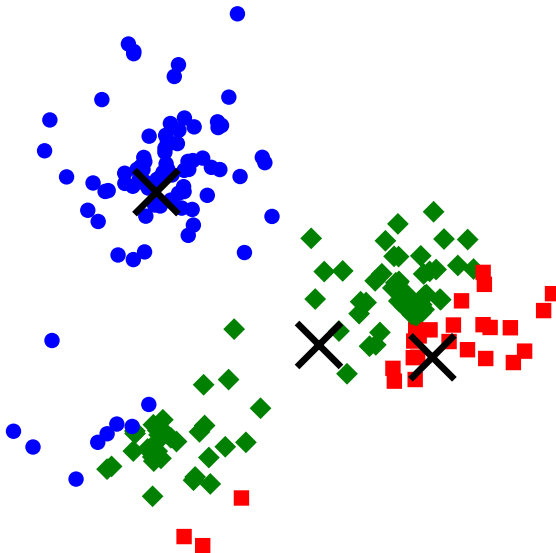
Exemple : initialisation



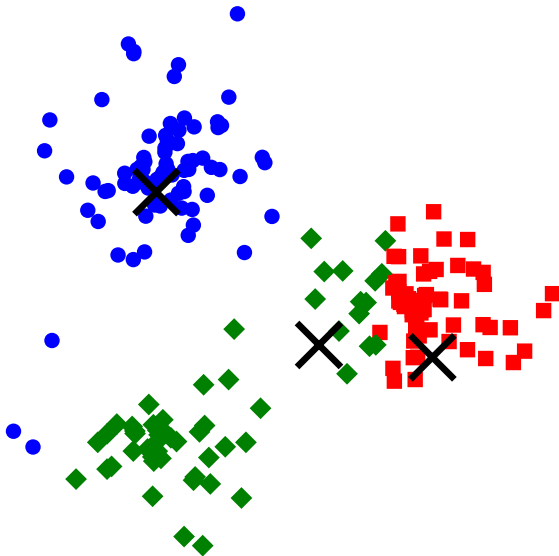
Exemple : tour $p = 0$, affectation



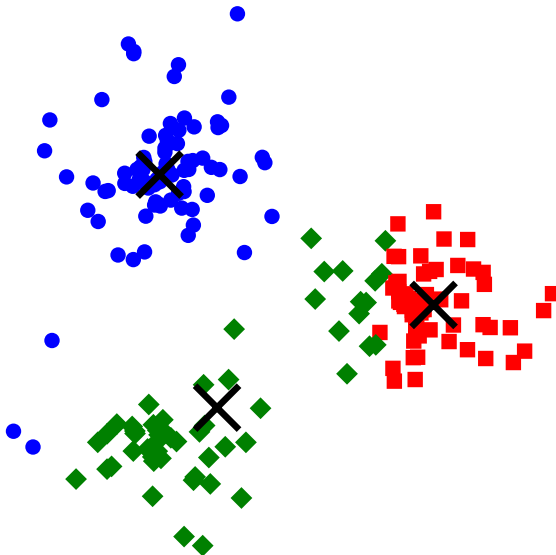
Exemple : tour $p = 0$, mise à jour



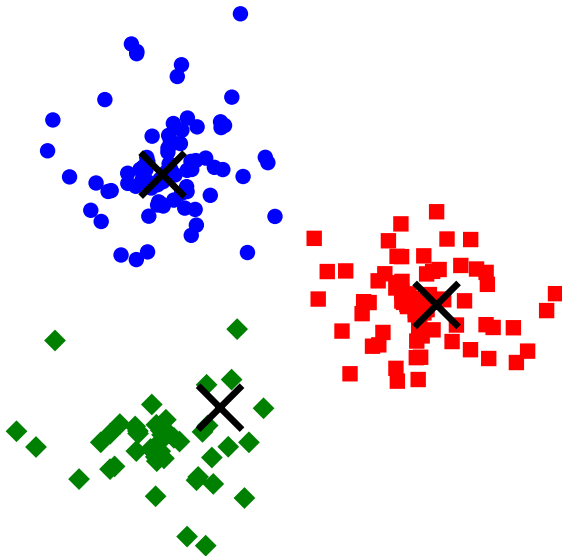
Exemple : tour $p = 1$, affectation



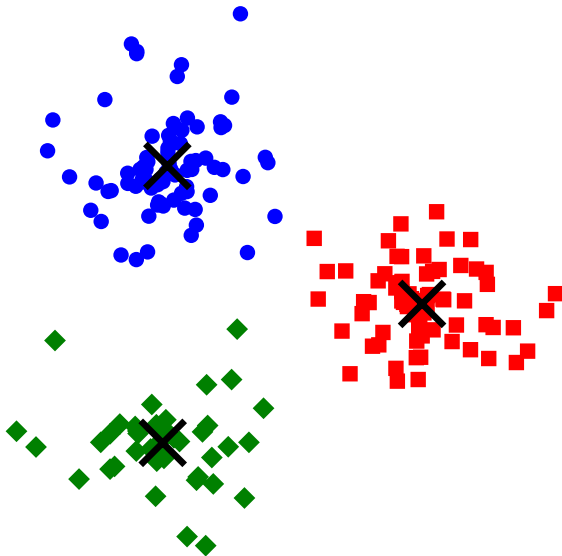
Exemple : tour $p = 1$, mise à jour



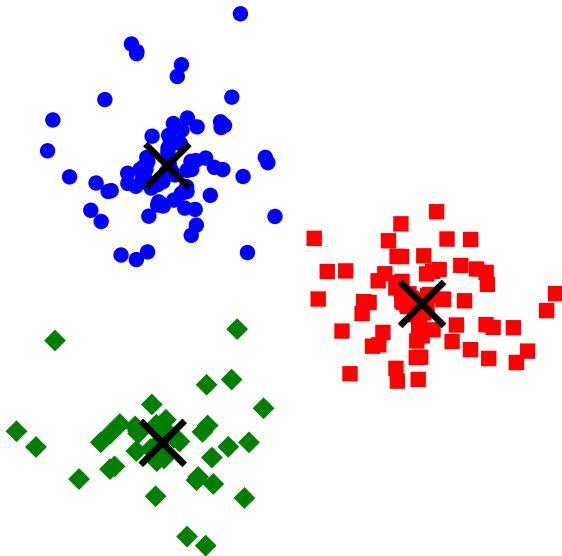
Exemple : tour $p = 2$, affectation



Exemple : tour $p = 2$, mise à jour



Exemple : tour $p = 3$, affectation



Critère d'arrêt

Preuve de convergence

La quantité

$$E(G_0^p, \dots, G_{K-1}^p) = \sum_{i=0}^{K-1} \sum_{j \in G_i^p} \|x_j - \mu_i^p\|^2$$

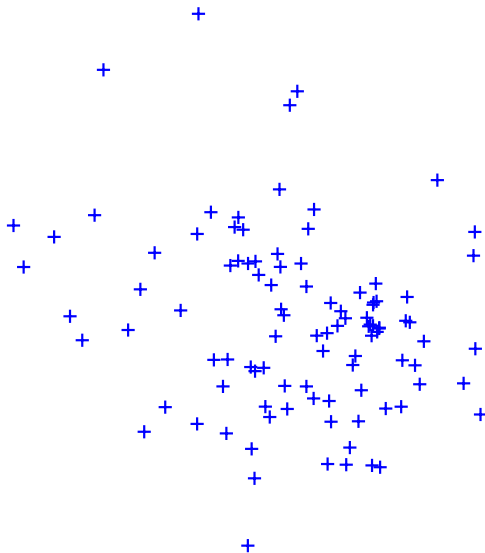
décroît en fonction de p .

L'algorithme des K -moyennes converge vers un minimum local de la fonction E .

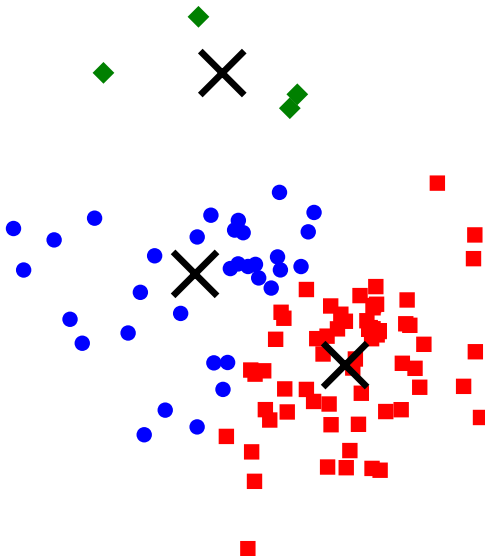
Critères d'arrêt classiques

- arrêt dès que deux itérations successives donnent les mêmes affectations (ou les mêmes centroïdes) ;
- arrêt dès que la quantité E a décru de moins qu'un seuil $\varepsilon > 0$ fixé au préalable.

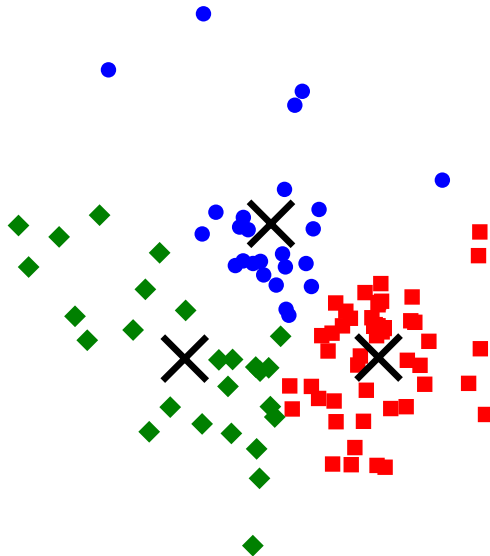
Dépendance à l'initialisation : exemple



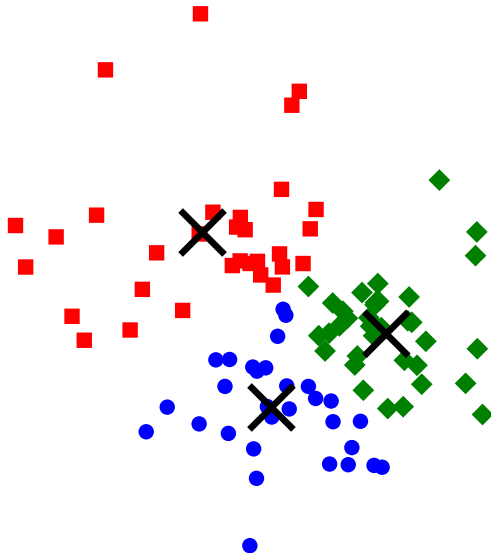
Dépendance à l'initialisation : résultat 1



Dépendance à l'initialisation : résultat 2



Dépendance à l'initialisation : résultat 3



Visualisation

Allez voir cet article de blog

Question en suspens

Comment choisir K ?